

Министерство образования и науки РФ
Нефтеюганский индустриальный колледж (филиал) федерального
государственного бюджетного образовательного учреждения высшего
профессионального образования «Югорский государственный университет»

МАТЕМАТИКА

учебное пособие для подготовительных курсов

Нефтеюганск
2015

ОДОБРЕНА
Предметной (цикловой)
комиссией
Протокол № 2 от 8.10.15
Председатель П(Ц)К
О.В. Гарбар

Утверждена
заседанием методсовета
Протокол № 2 от 12.11.15
Председатель методсовета
И.А. Успехова

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методическое пособие по математике предназначено для слушателей подготовительных курсов и составлено с учетом Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования по предмету МАТЕМАТИКА.

Данное пособие содержит материалы, которые помогут слушателю систематизировать свои знания, подготовиться к Итоговой Государственной Аттестации, а также к продолжению образования. Пособие состоит из двух разделов. В первый раздел включены основные теоретические понятия, формулы и теоремы, а так же приведены примеры с подробным решением. Основные теоретические понятия отмечены в тексте символом



Второй раздел содержит варианты демонстрационных тестов ИГА.

Составитель: И.А. Успехова – преподаватель НИК (филиала) ФГБОУ ВПО «ЮГУ»
Г.А. Пожидаева – преподаватель НИК (филиала) ФГБОУ ВПО «ЮГУ»

Часть I

Основные теоретические понятия, формулы и теоремы

АЛГЕБРА

1.1 Числа и вычисления

Порядок действий (если в выражении нет скобок):

1. Возвести числа в степень, извлечь квадратные корни из чисел.
2. Найти произведение и частное (умножение, деление).
3. Найти алгебраическую сумму (сумму чисел с различными знаками).

Действия над десятичными дробями

➤ *Складываем и вычитаем десятичные дроби поразрядно, записывая числа так, чтобы запятая оказалась под запятой. В ответе запятая ставится под запятой.*

Пример: а) $12+0,8 = 12,8$, б) $15,8 - 0,08 = 15,80 - 0,08 = 15,72$

➤ *Чтобы умножить десятичные дроби, надо выполнить умножение, не обращая внимания на запятую, затем в ответе поставить запятую так, что бы после запятой оказалось столько знаков, сколько их было в обоих множителях.*

Например: а) $1,5 \cdot 0,02 = 0,030 = 0,03$, б) $1,23 \cdot 3 = 3,69$

➤ *При делении на десятичную дробь переносим запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе.*

Пример: а) $12:0,2 = 120:2 = 60$, б) $\frac{1,5}{0,03} = \frac{1,50}{0,03} = \frac{150}{3} = 50$

Действия над положительными и отрицательными числами

➤ *При сложении чисел в ответ ставить знак числа с большим модулем. При сложении чисел одного знака, сложить их модули. При сложении чисел разных знаков из большего модуля вычесть меньший модуль.*

Пример: а) $-4,1 - 1,09 = -5,19$ (числа одного знака),

б) $7 - 12 = -5$ (числа разных знаков), в) $-0,3 + 7 = 6,7$ (числа разных знаков).

➤ *При умножении и делении чисел одного знака получается положительное число. При умножении и делении чисел разных знаков получается отрицательное число.*

Пример: а) $-3,1 \cdot (-0,2) = 0,62$ (числа одного знака),

б) $1,6 : (-4) = -0,4$ (числа разных знаков), в) $-5 \cdot 0,03 = -0,15$ (числа разных знаков), г) $0,12 : 0,3 = 1,2 : 3 = 0,4$ (числа одного знака).

Действия над обыкновенными дробями

Основное свойство дроби: Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и тоже число, то получится дробь равная данной.

➤ *При сложении (вычитании) дробей с одинаковым знаменателем, знаменатель оставить без изменения, а числители сложить (вычесть) и записать результат в числитель.*

Пример: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$.

➤ *При сложении (вычитании) обыкновенных дробей с разными знаменателями найти наименьший общий знаменатель, числители умножить на дополнительные множители и сложить (вычесть). Результат записать числитель.*

Например: $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20-9}{24} = \frac{11}{24}$ (дополнительный множитель к первой дроби равен 4, а ко второй 3).

➤ *При умножении обыкновенных дробей числитель первой дроби умножить на числитель второй дроби, а знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй. Если возможно дробь сократить.*

➤ При делении обыкновенных дробей первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример: а) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$ (сократили на 3 и на 4),

б) $1,2 : \frac{2}{15} = \frac{12 \cdot 15}{10 \cdot 2} = \frac{6 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 9$ (представили десятичную дробь в виде обыкновенной, сократили на 2 и 5, затем на 2).

в) $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} : \frac{5 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{7}{2} : \frac{21}{4} = \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 21} = \frac{2}{3}$ (сократили на 7 и 2).

1.2 Степень числа

➤ Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равен a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

Свойства степеней

$$1. a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2. a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$9. a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$3. (a^n)^m = a^{nm}$$

$$4. (ab)^n = a^n b^n$$

$$5. a^0 = 1$$

$$6. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$7. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$8. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Пример. Найти значение выражения:

$$а) (1,8 \cdot 10^{-2}) \cdot (2 \cdot 10^{-3}) = (1,8 \cdot 2) \cdot (10^{-2} \cdot 10^{-3}) = 3,6 \cdot 10^{-5} = 3,6 \cdot 0,00001 = 0,000036$$

$$б) \frac{2,7 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0,9 \cdot 10^{-1} = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09.$$

Пример. Представить выражение в виде степени:

$$а) \frac{a^{-2} \cdot a^{-5}}{(a^{-2})^6} = \frac{a^{-7}}{a^{-12}} = a^5$$

Пример. Вычислить:

$$а) 10^2 \cdot 2^{-2} - 17^0 = 100 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 25 - 1 = 24$$

$$б) (2^{-1})^{-3} \cdot 2^{-6} = 2^3 \cdot 2^{-6} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

1.2 Выражения и их преобразования

Одночлены. Многочлены

➤ Одночленом называется произведение чисел, переменных и их степеней. Если первым множителем одночлена является число, а затем различные буквенные множители следуют в алфавитном порядке, то говорят, что одночлен приведен к стандартному виду.

Пример. Примести одночлен к стандартному виду:

$$а) 3a^2b \cdot (-2a^3b^6) = -6a^5b^7$$

$$б) (5x^3y)^2 \cdot 7x = 25x^6y^2 \cdot 7x = 175x^7y^2$$

➤ Многочленом называется сумма одночленов. Многочлен является многочленом стандартного вида, если каждый его член является одночленом стандартного вида.

Пример. Упростить выражение:

а) $5(2x - 3) - 7x = 10x - 15 - 7x = 3x - 15$

б) $(3x + 1)(2 - x) + 3x^2 = 6x - 3x^2 + 2 - x + 3x^2 = 5x + 2$

Формулы сокращенного умножения

- *Квадрат суммы двух выражений равен сумме квадрата первого выражения, удвоенного произведения первого и второго выражения и квадрата второго выражения.*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

- *Произведение разности двух выражений на их сумму равно разности квадратов этих выражений.*

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

- *Произведение суммы двух выражений на их неполный квадрат разности равен сумме кубов этих выражений.*

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

- *Произведение разности двух выражений на их неполный квадрат суммы равен разности кубов этих выражений.*

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

- *Куб суммы (разности) двух выражений равен*

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Пример. Упростить выражение:

а) $(5a - 2)^2 - 2(3a + 1) = 25a^2 - 20a + 4 - 6a - 2 = 25a^2 - 26a + 2$

б) $(3x - 1)(2x + 3) - (2x - 5)^2 = 6x^2 + 9x - 2x - 3 - (4x^2 - 20x + 25) = 6x^2 + 7x - 3 - 4x^2 + 20x - 25 = 2x^2 + 27x - 28$.

в) $(2c - 3x^2)^3 = 2^3 c^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot c^2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2c \cdot 3^2 (x^2)^2 - 3^3 \cdot (x^2)^3 = 8c^3 - 36c^2 x^2 + 54cx^4 - 27x^6$.

Арифметический квадратный корень

- *Квадратным корнем из числа a , называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен a .*

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a} = x \\ a \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x^2 = a, \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Свойства

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0;$

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0;$

3. $\sqrt{a^2} = |a|$

Пример. Найти значение выражения:

а) $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} - 15 = 6\sqrt{36} - 15 = 36 - 15 = 21;$

б) $\frac{\sqrt{20}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{20}{5}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{4} = \frac{2}{3}$

в) $\frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{10} = \frac{\sqrt{25}}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$

Пример. Упростить выражение:

а) $\sqrt{20} - 3\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 5} - 3\sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{5} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$
 б) $4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - 5\sqrt{6} = 4\sqrt{4} - 8\sqrt{6} - 5\sqrt{6} = 8 - 13\sqrt{6}$
 в) $(3\sqrt{2} + 1)^2 - 6\sqrt{2} = (3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 + 1 - 6\sqrt{2} = 18 + 6\sqrt{2} + 1 - 6\sqrt{2} = 19$.

Разложение многочлена на множители

1. способ: вынесение общего множителя за скобки.

Пример: Разложить многочлен на множители:

а) $6ab - 8a = 2a(3b - 4)$;
 б) $3x^4 - x^3y + 2x^2y^2 = x^2(3x^2 - xy + 2y^2)$

2. способ: группировка.

Пример: Представить многочлен в виде произведения:

а) $2ab - 4a + 3b - 6 = (2ab - 4a) + (3b - 6) = 2a(b - 2) + 3(b - 2) = (b - 2)(2a + 3)$

3. способ: с помощью формул.

Пример: Разложить многочлен на множители:

а) $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$
 б) $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

Алгебраические дроби

- Дробь является алгебраической дробью, если ее знаменатель содержит переменную.
- При сложении (вычитании) алгебраических дробей с одинаковым знаменателем, знаменатель оставляем без изменения, а числители складываем (вычитаем) и результат записываем в числитель.

Пример: $\frac{2a-1}{7a} + \frac{3a+2}{7a} = \frac{5a+1}{7a}$.

- Чтобы сократить алгебраическую дробь надо числитель и знаменатель разложить на множители и разделить их на один и тот же множитель.

Пример. Сократить дробь $\frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} = \frac{x(2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} = \frac{x}{2x + 1}$.

- При сложении (вычитании) алгебраических дробей с разными знаменателями рекомендуется действовать по плану:

1. Если числитель или знаменатель являются многочленами, то их необходимо взять в скобки.
2. Если возможно, разложить знаменатели дробей на множители.
3. Найти наименьший общий знаменатель. Он должен состоять из различных множителей, входящих в знаменатели обеих дробей.
4. Найти дополнительные множители для каждой дроби. Их получить в результате деления общего знаменателя на знаменатели исходных дробей.
5. Числитель каждой дроби умножить на свой дополнительный множитель. Результат записать в числитель.
6. Выполнить действия в числителе: раскрыть скобки, привести подобные слагаемые.
7. Если возможно, то дробь сократить.

Пример. Выполнить действие:

а) $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1} = \frac{(a+1)^2 - (a-1)^2}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a + 1)}{(a-1)(a+1)} =$
 $= \frac{a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2a - 1}{(a-1)(a+1)} = \frac{4a}{a^2 - 1}$

б) $\frac{a}{a^2 - 1} - \frac{a}{a+1} = \frac{a}{(a-1)(a+1)} - \frac{a}{a+1} = \frac{a - a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a - a^2 + a}{(a-1)(a+1)} = -\frac{a^2}{a^2 - 1}$

- **При умножении алгебраических дробей рекомендуется действовать по плану:**
1. Если числители и знаменатели дробей – многочлены, то их берем в скобки и если возможно, раскладываем на множители
 2. Числитель первой дроби умножается на числитель второй дроби, а знаменатель первой дроби умножается на знаменатель второй. Если возможно дробь сокращаем на одинаковые множители в числителе и знаменателе.
- **При делении алгебраических дробей первая дробь умножается на дробь, обратную второй.**

Пример. Выполнить действия:

$$a) \frac{2x-2y}{y} \cdot \frac{3y}{x^2-y^2} = \frac{2(x-y) \cdot 3y}{y(x-y)(x+y)} = \frac{6}{x+y};$$

$$б) \frac{a+x}{a} : \frac{3a+3x}{a^2} = \frac{(a+x) \cdot a^2}{a \cdot 3(a+x)} = \frac{a}{3}.$$

Арифметическая и геометрическая прогрессии

- **Арифметической прогрессией называется последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d , которое называют разностью арифметической прогрессии.**

Формула n – члена

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Формулы суммы n – первых членов

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Пример. Найти десятый член арифметической прогрессии 2; 8; 14;...

Решение. $a_1 = 2$, $d = a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$,

$$a_{10} = a_1 + 9d, \quad a_{10} = 2 + 9 \cdot 6 = 2 + 54 = 56.$$

Пример. Найти сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии 12,5; 7; 1,5;...

Решение. $a_1 = 12,5$, $d = a_2 - a_1 = 7 - 12,5 = -5,5$,

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = \frac{2 \cdot 12,5 + 19 \cdot (-5,5)}{2} \cdot 20 = \frac{(25 - 104,5) \cdot 20}{2} = -795$$

- **Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и тоже отличное от нуля число q , которое называют знаменателем геометрической прогрессии.**

Формула n – члена

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Формула суммы n – первых членов

$$S_n = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1}$$

Пример. Найти пятый член геометрической прогрессии 0,5; 1; 2;...

Решение. $b_1 = 0,5$, $q = \frac{b_2}{b_1} = 1 : 0,5 = 2$,

$$b_5 = b_1 q^4, \quad b_5 = 0,5 \cdot 2^4 = 0,5 \cdot 16 = 8$$

Пример. Найти сумму шести первых членов геометрической прогрессии 1; 3; 9;...

Решение. $b_1 = 1$; $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{1} = 3$;

$$S_6 = \frac{b_1 q^6 - b_1}{q - 1}, \quad S_6 = \frac{1 \cdot 3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} = \frac{728}{2} = 364$$

1.3 Уравнения и неравенства

Линейные уравнения

- Уравнение вида $ax + b = 0$, где a, b – числа, x – переменная называется линейным. Это уравнение первой степени.
- Корнем уравнения называется значение переменной, которое обращает уравнение в верное равенство.
- Решить уравнение это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Чтобы решить линейное уравнение надо:

1. Перенести слагаемые с переменной в одну часть уравнения, а слагаемые без переменной в другую, при этом поменять знак этих слагаемых на противоположный.
2. Привести подобные слагаемые в каждой части уравнения.
3. Разделить обе части уравнения на коэффициент, стоящий перед переменной.

Пример. Решить уравнение:

а) $3x - 7 = 4x - 12$ $3x - 4x = -12 + 7$ $-x = -5$ $x = 5$	б) $3(5 + 2x) = 4 - (2 - x)$, $3(5 + 2x) = 4 - (2 - x)$, $15 + 6x = 4 - 2 + x$, $6x - x = 2 - 15$, $5x = -13$ $x = \frac{-13}{5}$, $x = -2,6$
в) $\frac{x-1}{2} - \frac{3}{4} = x \quad \cdot 4$, $2(x-1) - 3 = 4x$, $2x - 2 - 3 = 4x$, $2x - 4x = 5$ $-2x = 5$, $x = -2,5$	г) $\frac{2x-3}{3} - \frac{x+1}{6} = 2 \quad \cdot 6$, $2(2x-3) - (x+1) = 12$, $4x - 6 - x - 1 = 12$, $3x = 12 + 7$, $3x = 19$, $x = \frac{19}{3}$, $x = 6\frac{1}{3}$

Квадратные уравнения

- Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – числа, причем $a \neq 0$, x – переменная.
- Если коэффициенты b и c отличны от нуля, то такое уравнение называется полным квадратным уравнением. Такое уравнение решается с помощью формул.

$$D = b^2 - 4ac, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

*Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня.
 Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или два равных)
 Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.*

Пример. Решить уравнение:

а) $x^2 - 5x - 14 = 0$,

$a = 1, b = -5, c = -14$,

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81 = 9^2, D > 0$, 2 различных корня

$x_1 = \frac{5-9}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{5+9}{2 \cdot 1} = \frac{14}{2} = 7$

б) $4x^2 + 4x = -1$,

$4x^2 + 4x + 1 = 0$,

$a = 4, b = 4, c = 1$,

$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0, D = 0$, 1 корень,

$x = \frac{-4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$

➤ *Если хотя бы один из коэффициентов квадратного уравнения равен нулю (b или c), то такое уравнение называется неполным квадратным уравнением. Его можно решить без формул.*

Пример. Решить уравнение:

а) $2x^2 - x = 0$, $x(2x - 1) = 0$, $x = 0$ или $2x - 1 = 0$, $2x = 1$, $x = 0,5$	б) $4x^2 - 1 = 0$ $4x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$
в) $4x^2 - 12 = 0$ $4x^2 = 12$, $x^2 = 3$, $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$	г) $3x^2 + 27 = 0$ $3x^2 = -27$, $x^2 = -9$, Корней нет

Квадратный трехчлен

Разложение квадратного трехчлена на множители

- *Квадратным трехчленом называется выражение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа, причем $a \neq 0$, x – переменная.*
- *Корнем квадратного трехчлена, называется значение переменной x , при котором трехчлен равен нулю.*

Квадратный трехчлен можно разложить на множители с помощью формулы

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена.

Пример. Разложить многочлен на множители $2x^2 - 3x - 5$. Найдем корни квадратного трехчлена, решив уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$, $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$, $x_1 = \frac{3-7}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$, $x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, Ответ: $2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+1) = (2x-5)(x+1)$.	Пример: Сократить дробь $\frac{x^2 + x - 6}{2x - 4}$ Найдем корни квадратного трехчлена, решив уравнение $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$, $x_1 = \frac{-1-5}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$, $x_2 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$, $\frac{x^2 + x - 6}{2x - 4} = \frac{(x+3)(x-2)}{2(x-2)} = \frac{x+3}{2}$
---	---

Рациональные уравнения

- **Уравнение называется рациональным, если в нем содержатся алгебраические дроби.**
- **Чтобы решить рациональное уравнение надо:**
 1. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель дробей, входящих в это уравнение.
 2. Решить полученное целое уравнение.
 3. Проверить корни, подставив их в общий знаменатель. Если корень уравнения обращает знаменатель в нуль, то он является посторонним и в ответ он не записывается.

Пример. Решить уравнение:

а) $\frac{2}{3x-1} = \frac{5}{4x+1} \quad \cdot (3x-1)(4x+1)$ $2(4x+1) = 5(3x-1)$, $8x+2 = 15x-5$, $8x-15x = -5-2$, $-7x = -7$ $x = 1$ Проверка: если $x = 1$, то $(3 \cdot 1 - 1)(4 \cdot 1 + 1) \neq 0$ Ответ: $x = 1$.	б) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} = 1 \quad \cdot x(x+2)$, $x+2+2x = x(x+2)$, $3x+2 = x^2+2x$, $3x+2-x^2-2x = 0$, $-x^2+x+2 = 0 \quad \cdot (-1)$, $x^2-x-2 = 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1+8 = 9$, $x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, $x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ Проверка: если $x = -1$, то $-1(-1+2) \neq 0$, если $x = 2$, то $2(2+2) \neq 0$, Ответ: $x = -1, x = 2$
---	---

Системы уравнений

➤ **Способ подстановки**

1. Выразить любую переменную из любого уравнения.
2. Подставить полученное выражение в другое уравнение вместо этой переменной.
3. Решить уравнение с одной переменной.
4. Найти вторую переменную по формуле, которая получена в первом шаге.

Пример. Решить систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x - 6y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x = 6y - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2(6y - 2) - 3y = 5, \\ x = 6y - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6y - 2, \\ 12y - 4 - 3y = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6y - 2, \\ 9y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6y - 2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \cdot 1 - 2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (4;1).

$$б) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x = 2 + y; \end{cases} \quad \begin{cases} (2 + y)^2 + y^2 = 10, \\ x = 2 + y; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 + 4y + y^2 + y^2 = 10, \\ x = 2 + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 + 4y + 2y^2 - 10 = 0, \\ x = 2 + y; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y^2 + 4y - 6 = 0, | : 2 \\ x = 2 + y; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + 2y - 3 = 0, \\ x = 2 + y; \end{cases}$$

Решим уравнение $y^2 + 2y - 3 = 0$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16,$$

$$y_1 = \frac{-2 - 4}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3,$$

$$y_2 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\begin{cases} y_1 = -3, \\ x_1 = 2 - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -3, \\ x_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 2 + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (-1;-3), (3;1).

➤ **Способ сложения**

1. Умножить каждое уравнение на такие числа, чтобы перед одной из переменных получились противоположные коэффициенты.
2. Сложить почленно уравнения.
3. Решить полученное уравнение с одной переменной.
4. Найти другую переменную, подставив найденную переменную в любое уравнение.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 1, | \cdot 3, \\ 3x + 5y = 1; | \cdot (-2); \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 9y = 3, \\ -6x - 10y = -2; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot (-1) &= 1, & -y &= 1, \\ 2x &= 4, & y &= -1. \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ответ: (2;-1).

Неравенства

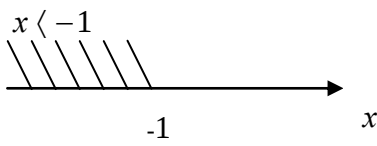
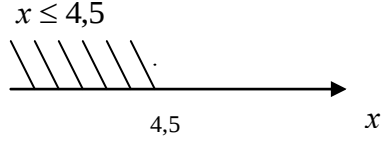
Свойства неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
3. Если $a > b, c > 0$, то $ac > bc$.
4. Если $a > b, c < 0$, то $ac < bc$.
5. Если $a > b, a > 0, b > 0$ то $\boxed{a^2 > b^2}, \boxed{\sqrt{a} > \sqrt{b}}, \boxed{\frac{1}{a} < \frac{1}{b}}$.

Линейные неравенства

- Неравенство вида $ax + b > 0$, где a, b – числа, x – переменная, называется линейным.
- Чтобы решить линейное неравенство, надо:
1. Слагаемые с переменной перенести в левую часть, а слагаемые без переменной в правую часть неравенства, при этом у этих слагаемых поменять знак на противоположный. Знак неравенства при этом не менять.
 2. Привести подобные слагаемые в каждой части неравенства.
 3. Разделить обе части неравенства на коэффициент, стоящий перед переменной, при этом, если коэффициент положительный, знак неравенства не менять, если коэффициент отрицательный, то знак неравенства необходимо поменять.
 4. На координатной прямой отметить найденное число и штриховкой показать решение неравенства в ту сторону, куда показывает знак неравенства.
 5. Ответ записать в виде промежутка. Если неравенство было строгое, то рядом с числом ставить круглую скобку. Если неравенство было нестрогое, то рядом с числом ставить квадратную скобку.

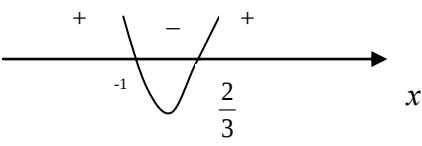
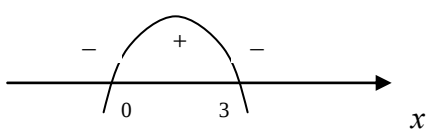
Пример. Решить неравенство:

а) $3 - 2(3x - 7) > x + 24$, $3 - 6x + 14 > x + 24$, $-6x - x > 24 - 3 - 14$, $-7x > 7$, $x < -1$  Ответ: $(-\infty; -1)$	б) $5x - 7 \leq 8 - 3(2 - x)$ $5x - 7 \leq 8 - 6 + 3x$, $5x - 3x \leq 8 - 6 + 7$, $2x \leq 9$, $x \leq 4,5$  Ответ: $(-\infty; 4,5]$
---	--

Квадратные неравенства

- **Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c – числа ($a \neq 0$), x – переменная.**
- **Чтобы решить квадратное неравенство надо:**
1. Рассмотреть функцию $y = ax^2 + bx + c$, $y > 0$.
 2. Найти нули функции, решив уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.
 3. Построить на чертеже параболу (ветви вверх, если $a > 0$, ветви вниз, если $a < 0$).
 4. На чертеже отметить знак, который принимает квадратичная функция на каждом промежутке координатной прямой.
 5. В ответ записать промежутки, на которых знак функции соответствует знаку неравенства.

Пример. Решить неравенство:

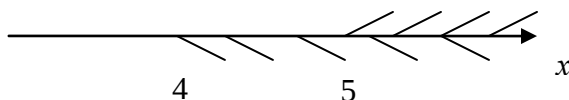
а) $3x^2 + x - 2 \leq 0$, Рассмотрим функцию $y = 3x^2 + x - 2$, $y \leq 0$ Найдем нули функции $3x^2 + x - 2 = 0$, $D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25$, $x_1 = \frac{-1-5}{2 \cdot 3} = \frac{-6}{6} = -1$, $x_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,  Ответ: $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$	б) $-x^2 + 3x < 0$ Рассмотрим функцию $y = -x^2 + 3x$, $y \leq 0$ Найдем нули функции $-x^2 + 3x = 0$, $x(-x + 3) = 0$, $x = 0$ или $-x + 3 = 0$, $x = 3$.  Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.
---	---

Системы неравенств

- **Чтобы решить систему неравенств, надо:**
1. Решить каждое неравенство.
 2. На чертеже отметить решение каждого неравенства.
 3. В ответ записать промежутки, в которых оба неравенства имеют решение.

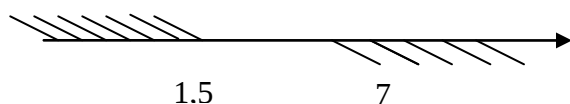
Пример. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 5 > 5, \\ 7 - x < 2x - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 5 + 5, \\ -x - 2x < -5 - 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 10, \\ -3x < -12; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5, \\ x > 4; \end{cases}$



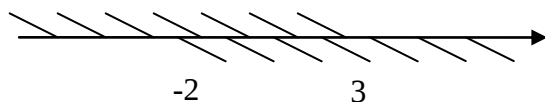
Ответ: $(5; +\infty)$.

$$б) \begin{cases} 5+3x < 8+x, \\ 2x > 14; \end{cases} \begin{cases} 3x-x < 8-5, \\ 2x > 14; \end{cases} \begin{cases} 2x < 3, \\ x > 7; \end{cases} \begin{cases} x < 1,5, \\ x > 7; \end{cases}$$



Ответ: решений нет.

$$в) \begin{cases} x-4 \leq 5-2x, \\ 1-2x \leq 7+x; \end{cases} \begin{cases} x+2x \leq 5+4, \\ -2x-x \leq 7-1; \end{cases} \begin{cases} 3x \leq 9, \\ -3x \leq 6; \end{cases} \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -2; \end{cases}$$



Ответ: $[-2; 3]$

1.4 Функции

- **Функцией называется зависимость одной переменной от другой, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной.**
- **Областью определения функции $D(f)$ называется множество всех допустимых значений независимой переменной x .**
- **Чтобы найти область определения функции надо посмотреть на действия, которые выполняются над переменной x .**

1. Если функция задана формулой, в которой нет деления на переменную и под арифметическим квадратным корнем нет переменной, то область определения все действительные числа.

Пример. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Если в формуле есть деление на переменную, то выписываем знаменатель и приравниваем его к нулю. Областью определения будут все числа, кроме найденных корней уравнения.

Пример. $y = \frac{2-x}{3x-x^2}$, $3x-x^2 = 0$, $x(3-x) = 0$, $x = 0$, или $3-x = 0$, $x = 0, x = 3$.

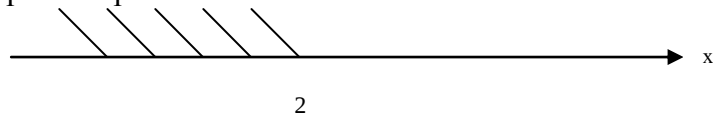
Ответ: $D(f) = \mathbb{R}$, кроме 0 и 3.

3. Если в формуле есть переменная под знаком арифметического квадратного корня, то выписываем подкоренное выражение. Оно должно быть неотрицательным (больше нуля или равно нулю).. Решаем неравенство. Областью определения будет решение неравенства.

Пример. $y = \sqrt{2-x}$,

$2-x \geq 0$. Это линейное неравенство, решаем его переносом слагаемых. $-x \geq -2$, $x \leq 2$.

Строим чертеж

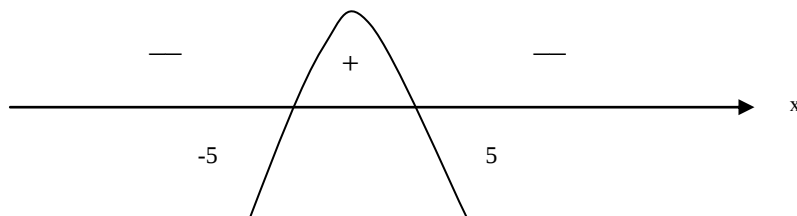


Ответ: $D(f) = (-\infty; 2]$

Пример. $y = \sqrt{25 - x^2}$.

Выписываем подкоренное выражение $25 - x^2 \geq 0$ и решаем квадратное неравенство. Сначала решим уравнение $25 - x^2 = 0$, $x = \pm 5$. Построим на чертеже параболу, ветви которой направлены вниз, так как коэффициент $a < 0$.

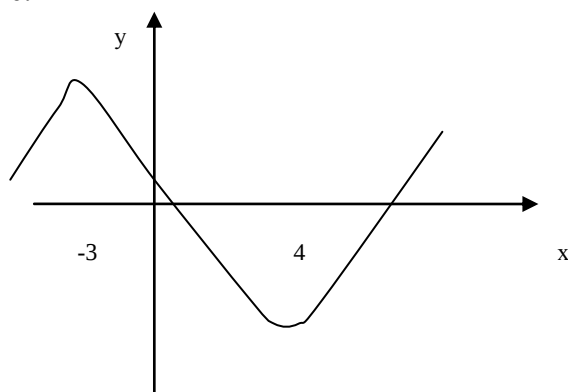
Отметим знак функции на каждом промежутке.



Ответ: $D(f) = [-5; 5]$

- Множеством значений функции $E(f)$ называется множество всевозможных значений зависимой переменной y .
- Функция называется возрастающей на $[a; b]$, если ее большему аргументу (x), на этом промежутке соответствует большее значение функции (y).
- Функция называется убывающей на $[a; b]$, если ее большему аргументу (x), на этом промежутке соответствует меньшее значение функции (y).

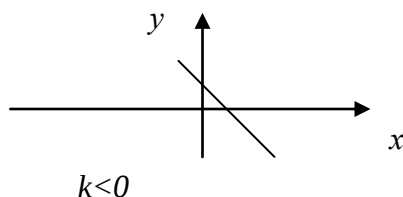
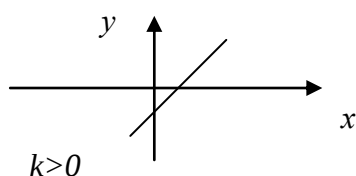
Пример. Указать промежутки возрастания и убывания функции, график которой изображен на рисунке.



Ответ: Функция возрастает при $x \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$, убывает при $x \in [-3; 4]$.

Линейная функция

- Линейной функцией называется функция, которая задается уравнением вида $y = kx + b$, где a, k – числа, x – независимая переменная, y – зависимая переменная.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Число k называется угловым коэффициентом, оно показывает направление прямой. Если $k > 0$, то прямая проходит из III четверти в I координатную четверть. Если $k < 0$, то – из II в IV четверть.



➤ Чтобы построить график линейной функции, надо:

1. Заполнить таблицу. Значения переменной x можно взять любые, значения переменной y вычислить по формуле $y = kx + b$.

x		
y		

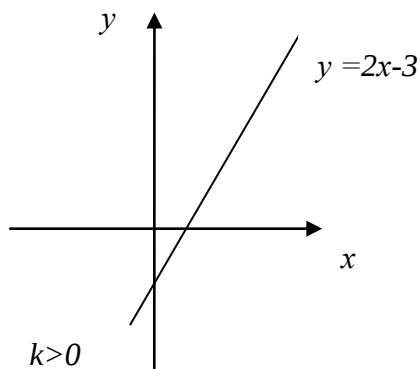
2. На координатной плоскости отметить точки с полученными координатами.
3. Через 2 точки провести прямую.

Пример. Построить график функции $y = 2x - 3$.

x	0	2
y	-3	1

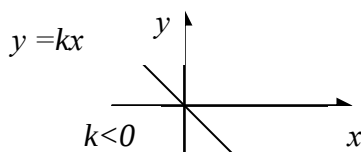
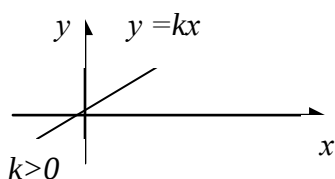
Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$;

Если $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$



Прямая пропорциональность

- Функция называется **прямой пропорциональностью**, если она задается уравнением вида $y = kx$, где k – число, причем $k \neq 0$, x – независимая переменная, y – зависимая переменная.
- Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.
- Если $k > 0$, то график расположен в I и III координатных четвертях, а если $k < 0$, то – во II и IV.



Обратная пропорциональность

- Функция называется **обратной пропорциональностью**, если она задается уравнением вида $y = \frac{k}{x}$, где k – число, причем $k \neq 0$, x – независимая переменная, y – зависимая переменная.
- Графиком обратной пропорциональности является гипербола.
- Если $k > 0$, то график расположен в I и III координатных четвертях, а если $k < 0$, то – во II и IV.

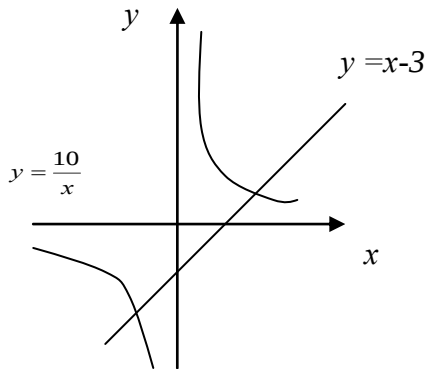
Пример. Построить графики функций $y = \frac{10}{x}$ и $y = x - 3$ записать координаты точек пересечения этих графиков.

$y = \frac{10}{x}$, график – гипербола

$y = x - 3$, график прямая

x	-10	-5	-1	1	5	10
y	-1	-2	-10	10	2	1

x	0	3
y	-3	0



Ответ: A(5;2), B(- 2;5).

Квадратичная функция

- **Функция называется квадратичной, если она задается уравнением вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа ($a \neq 0$), x – независимая, y – зависимая переменная.**
- **Графиком квадратичной функции является парабола. Если $a > 0$ – ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то – вниз. Координаты вершины параболы вычисляют по формулам $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$**

Пример. Построить график функции $y = x^2 + 2x + 3$.

Найдем координаты вершины параболы $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$,

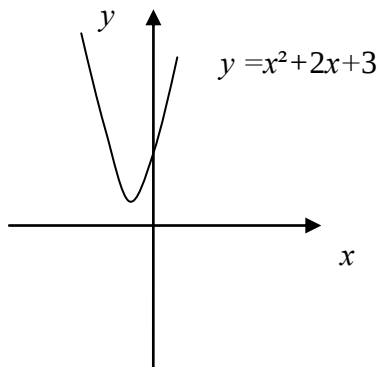
$$y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

Заполним таблицу. В центр запишем координаты вершины параболы.

x	-3	-2	-1	0	1
y	6	3	2	3	6

Если $x=0$, то $y(0) = (0)^2 + 2 \cdot (0) + 3 = 3$,

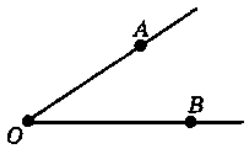
Если $x=1$, то $y(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$.



1.5 Основные геометрические теоремы и формулы

Углы

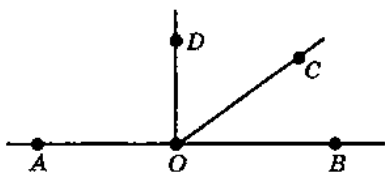
- Угол-фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки (вершины).



$\angle AOB$, лучи OA и OB — стороны угла AOB .

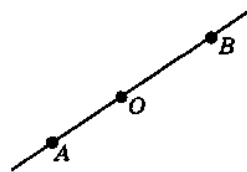
- Виды углов:

1. Прямой угол-угол, градусная мера которого равна 90° .
2. Острый угол-угол, градусная мера которого меньше 90° .
3. Тупой угол-угол, градусная мера которого больше 90° .



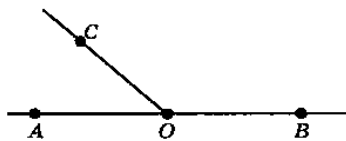
$\angle COB$ — острый угол,
 $\angle DOB$ и $\angle DOA$ — прямые углы,
 $\angle AOC$ — тупой угол.

4. Развёрнутый угол-угол, градусная мера которого равна 180° .

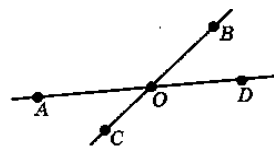


Полупрямые OA и OB являются дополнительными, значит $\angle AOB$ — развёрнутый угол.

- Смежными углами называются два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой.



$\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные углы,
 $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$.



$\angle AOB$ и $\angle DOC$ — вертикальные,
 $\angle AOC$ и $\angle DOB$ — вертикальные,
 $\angle AOB = \angle DOC$, $\angle AOC = \angle DOB$.

Сумма смежных углов равна 180° . Биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

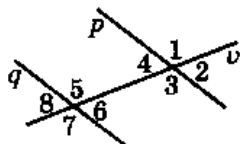
- Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.
Вертикальные углы равны.

Параллельные прямые

- Две прямые на плоскости называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

- При пересечении двух прямых третьей, образуются следующие пары углов:

1. Накрест лежащие — 3 и 5, 4 и 6 (внутренние); 1 и 7, 2 и 8 (внешние).
2. Соответственные — 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7.
3. Односторонние — 3 и 6, 4 и 5 (внутренние), 1 и 8, 2 и 7 (внешние).



Свойства параллельных прямых:

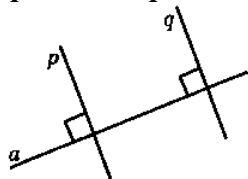
- Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то:
1. Накрест лежащие углы равны.

2. Соответственные углы равны.
3. Сумма односторонних углов равна 180° .

➤ Расстояние между параллельными прямыми-расстояние от любой точки одной прямой до другой прямой.

Перпендикулярные прямые

- Перпендикулярные прямые - две прямые, которые пересекаются под прямым углом.
- Перпендикуляр к данной прямой-отрезок прямой, перпендикулярный данной прямой и имеющий одним из своих концов точку их пересечения.
- Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и притом только один.
- Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и при том только одну.
- Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.



$$\left. \begin{array}{l} p \perp a \\ q \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow p \parallel q$$

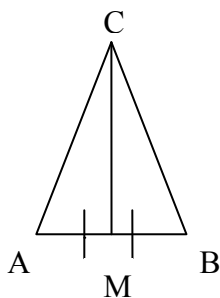
- Кратчайшее расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую.

n-угольники

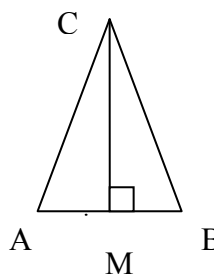
- Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.
- Сумма углов выпуклого n-угольника равна $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

Треугольник

- Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

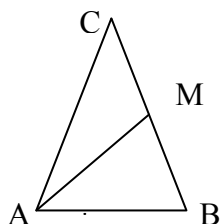


$$AM = MB$$



$$CM \perp AB$$

- Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.
- Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.



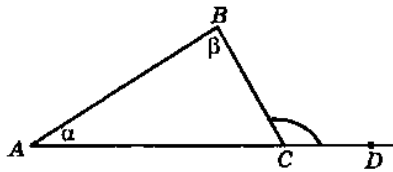
$$\angle CAM = \angle BAM$$

- Периметром треугольника называется сумма длин всех его сторон.

- Сумма углов треугольника равна 180° .

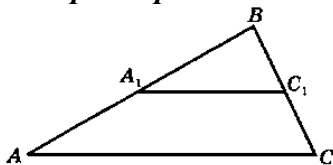
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

- Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.



$\angle BCD$ — внешний угол $\triangle ABC$,
 $\angle BCD = \alpha + \beta$.

- Два треугольника называются равными, если при наложении они совпадают.
 ➤ Свойство средней линии треугольника: Средняя линия треугольника параллельна одной из её сторон и равна её половине.



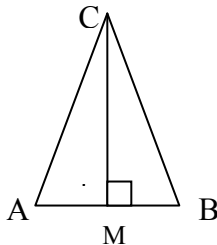
Если A_1C_1 — средняя линия треугольника ABC , то $A_1C_1 \parallel AC$ и
 $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$.

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. Если сторона и 2 прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и 2 прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

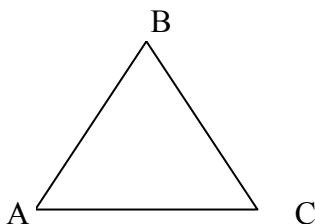
Формулы площадей треугольников

- Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CM$$

- Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.



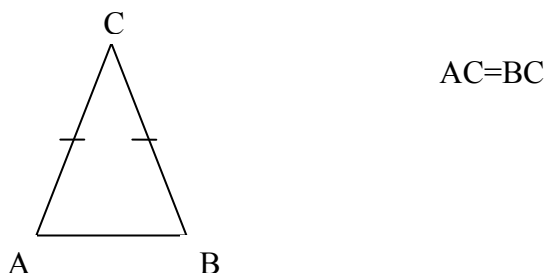
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

➤ **Формула Герона**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Равнобедренный треугольник

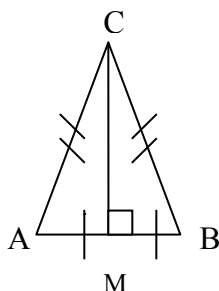
➤ **Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным.**



Равные стороны называют боковыми ($AC=BC$), третья сторона треугольника называется основанием (AB).

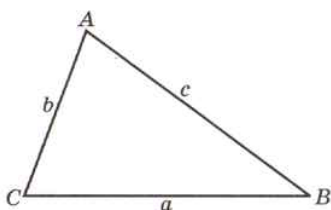
Свойства равнобедренного треугольника

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.
3. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и высотой.
4. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.



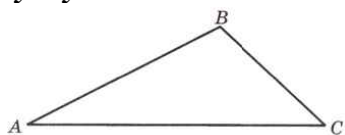
Остроугольный треугольник

Остроугольным называется треугольник, у которого все углы острые.



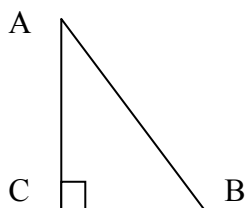
Тупоугольный треугольник

➤ **Тупоугольным называется треугольник, у которого один угол тупой.**



Прямоугольный треугольник

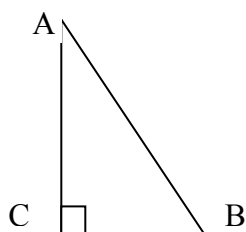
- *Прямоугольным треугольником называется треугольник, у которого один угол прямой.*



Стороны, прилежащие к прямому углу называются катетами прямоугольного треугольника (AC и BC), а сторона, лежащая напротив прямого угла называется гипотенузой (AB).

Свойства прямоугольного треугольника

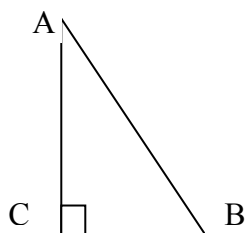
- *Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .*
- *В прямоугольном треугольнике напротив угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы.*
- *Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то он лежит напротив угла в 30° .*



$$\angle A = 30^\circ, \Rightarrow BC = \frac{1}{2} AB$$

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

- *Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.*
- *Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.*
- *Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.*



$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

Теорема Пифагора

- *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

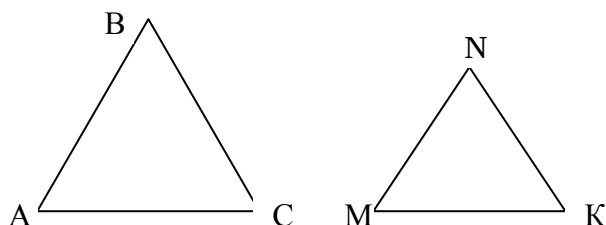
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов

УГЛЫ Функции	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

Подобные треугольники

- Два треугольника называются *подобными*, если у них углы равны, а сходственные стороны пропорциональны.



$$\angle A = \angle M, \angle B = \angle N, \angle C = \angle K$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK}$$

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.
2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами равны, то треугольники подобны.
3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Четырёхугольники

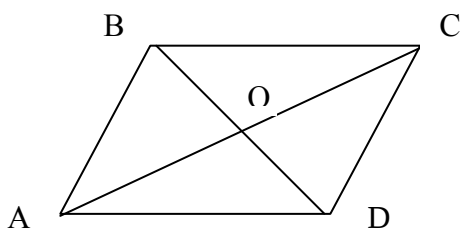
- Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360^0 .

Параллелограмм

- Параллелограммом называется четырёхугольник, стороны которого попарно параллельны.

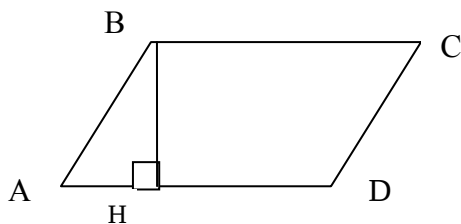
Свойства параллелограмма

- Противоположные стороны и углы параллелограмма равны.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180^0 .
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.



$$\begin{aligned} AB &= CD, BC = AD, \\ \angle A &= \angle C, \angle B = \angle D, \\ AO &= OC, BO = OD \end{aligned}$$

Формулы площадей параллелограммов



- *Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.*

$$S = AD \cdot BH$$

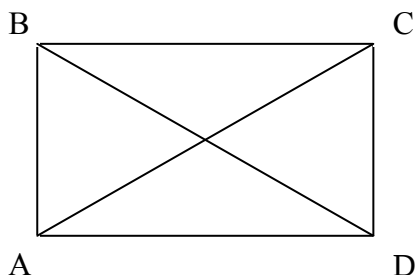
- *Площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними.*

$$S = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

- *Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними*

Прямоугольник

- *Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.*
- *Свойство диагоналей прямоугольника: Диагонали прямоугольника равны.*
- *Противоположные стороны и углы прямоугольника равны.*
- *Диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*
- *Сумма квадратов диагоналей прямоугольника равна сумме квадратов всех его сторон.*
- *Квадрат диагоналей прямоугольника равен сумме квадратов двух соседних сторон.*



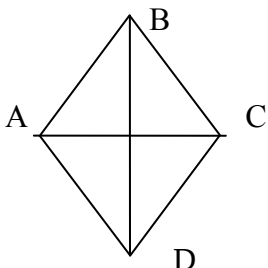
$$AC=BD$$

- *Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон*

$$S = AB \cdot AD$$

Ромб

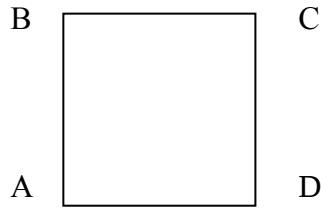
- *Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.*
- *Свойства диагоналей ромба: Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов.*
- *3. Диагонали ромба пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*



$$AC \perp BD, \angle ABD = \angle CBD, \\ \angle BAC = \angle DAC$$

Квадрат

- *Квадратом называется прямоугольник с равными сторонами.*



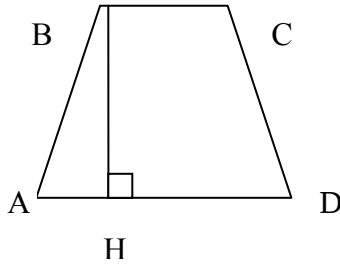
$$S = AB^2$$

Свойства диагоналей квадрата

- *Диагонали квадрата равны, точкой пересечения делятся пополам, взаимно перпендикулярны, являются биссектрисами его углов.*
- *Площадь квадрата равна:*
- *квадрату его стороны.*
 - *половине квадрата его диагонали.*

Трапеция

- *Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет. Параллельные стороны называются основаниями, а две другие стороны – боковыми.*



$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH$$

- *Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.*
- *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме её оснований.*
- *Сумма углов, прилежащих к боковой стороне равна 180° .*

Равнобедренная трапеция

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобедренной.



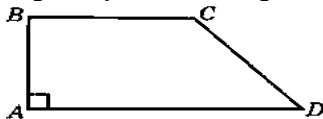
Трапеция $ABCD$ — равнобокая, так как $AB = CD$.

Свойства равнобедренной трапеции

- *Углы при верхнем основании равны.*
- *Углы при нижнем основании равны.*
- *Диагонали равнобокой трапеции равны.*

Прямоугольная трапеция

Прямоугольная трапеция - трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям. Прямоугольная трапеция имеет все свойства трапеции.



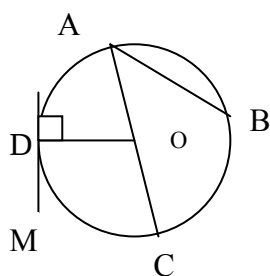
Трапеция $ABCD$ — прямоугольная, так как $\angle BAD = 90^\circ$.

- *Разность квадратов диагоналей прямоугольной трапеции равна разности квадратов её оснований.*

Окружность. Круг

- Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки.
- Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, называется радиусом окружности.
- Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называется хордой.
- Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.
- Касательной к окружности называется прямая, которая с окружностью имеет одну общую точку.

Свойство касательной: Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания



AO – радиус
 AC – диаметр
 AB – хорда
 $\angle BAC$ – вписанный угол
 $\angle AOD$ – центральный угол
 $DM \perp OD$, DM – касательная
 $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$

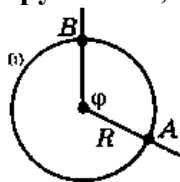
- Угол называется центральным, если его вершина лежит в центре окружности.

Свойство центрального угла: Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.

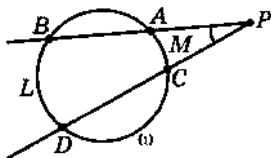
- Угол называется вписанным в окружность, если его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают ее.

Свойство вписанного угла: Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

- Длина дуги окружности, соответствующая центральному углу:



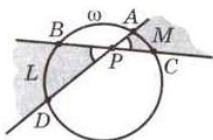
$$l = \frac{\pi R}{180} \varphi$$



Свойства углов и окружностей:

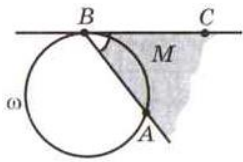
PB и PD — секущие, пересекающиеся в точке P вне окружности, поэтому $\angle BPD$ измеряется $\frac{1}{2}(\cup BLD - \cup AMC)$.

Угол между двумя секущими, проходящими через точку вне окружности, измеряется полуразностью дуг, заключённых между этими секущими.



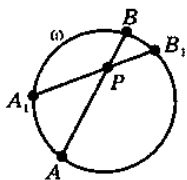
BC и AD — хорды, пересекающиеся в точке P , поэтому $\angle BPD$ измеряется $\frac{1}{2}(\cup AMC + \cup BLD)$.

Угол между двумя пересекающимися хордами, измеряется полусуммой дуг, заключённых между ними.



BC — касательная к окружности, BA — секущая, поэтому $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AMB$.

Угол между касательной к окружности и секущей, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами.

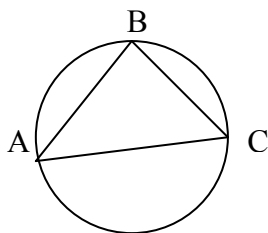


Если $AB \cap A_1B_1 = P$, то $AP \cdot BP = A_1P \cdot B_1P$.

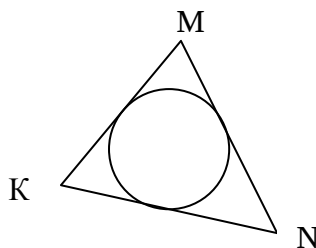
Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.

Вписанные и описанные окружности

- Окружность называется описанной около многоугольника, если она проходит через все его вершины (многоугольник называется вписанным в окружность).
- Окружность называется вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон (многоугольник называется описанным около окружности).



Описанная около
треугольника окружность



Вписанная в треугольник
окружность

- Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров.
- Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис.
- Многоугольник называется правильным, если его стороны и углы равны.

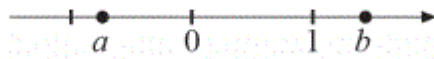
Часть 2
Тест № 1

1

Найдите значение выражения $\frac{6,9-1,5}{2,4}$.

2

Выберите верное утверждение относительно чисел a и b , расположенных на числовой прямой.



1) $a - b > 0$

2) $ab > 0$

3) $0 < \frac{1}{a}$

4) $1 < |b|$

3

Укажите два соседних целых числа, между которыми заключено число $2\sqrt{11}$.

1) 2 и 3

2) 6 и 7

3) 11 и 12

4) 45 и 46

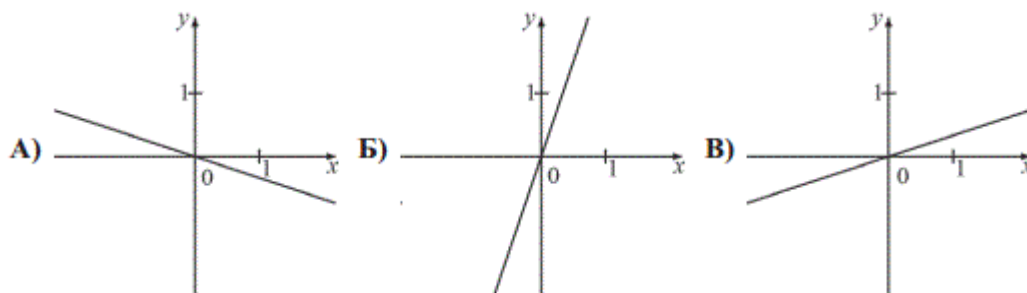
4

Найдите корни уравнения $2x^2 + 13x - 7 = 0$.

5

На рисунке изображены графики трёх функций, задаваемых формулами вида $y = kx$. Укажите для каждого графика соответствующую ему формулу, выбрав её из числа приведённых ниже.

ГРАФИКИ



ФУНКЦИИ

1) $y = 3x$

2) $y = \frac{1}{3}x$

3) $y = -3x$

4) $y = -\frac{1}{3}x$

Ответ:

А	Б	В

6

Дано уравнение $4 - 5(3x + 2) = 3x + 12$ и его решение. Уравнение решено неверно. Укажите в ответе номер шага, на котором допущена ошибка.

$4 - 5(3x + 2) = 3x + 12$

1) $4 - 15x - 10 = 3x + 12$

2) $-6 - 15x = 3x + 12$

3) $-15x + 3x = 6 + 12$

4) $-12x = 18$

5) $x = -1,5$

7

Упростив выражение $\frac{a^2 - 36b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{a + 6b}$, найдите его значение при $a = \sqrt{32}$, $b = \sqrt{50}$.

8

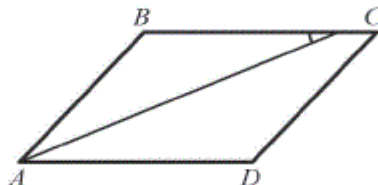
Решите неравенство $x^2 < 361$.

- | | |
|--|----------------|
| 1) $(-\infty; -19) \cup (19; +\infty)$ | 3) $(-19; 19)$ |
| 2) $(-\infty; -19] \cup [19; +\infty)$ | 4) $[-19; 19]$ |

Модуль "Геометрия"

9

Найдите величину острого угла C параллелограмма, изображённого на рисунке, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 25° .

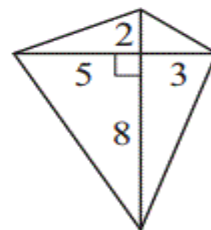


10

Диагональ трапеции делит её среднюю линию на отрезки, равные 4 см и 3 см. Найдите меньшее основание трапеции.

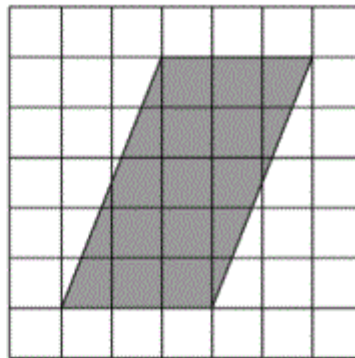
11

Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны.



12

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см изображён параллелограмм. Найдите длину его большей высоты. Ответ дайте в сантиметрах.



13

Укажите в ответе номера верных утверждений.

- 1) Точка, равноудаленная от всех вершин треугольника, является центром окружности, вписанной в этот треугольник.
- 2) Если периметр прямоугольника A больше периметра прямоугольника B , то площадь прямоугольника A больше площади прямоугольника B .
- 3) Из всех параллелограммов со сторонами a и b наибольшую площадь имеет прямоугольник.
- 4) В треугольнике не может быть больше одного тупого угла.

Модуль "Конкретно Реальная математика"

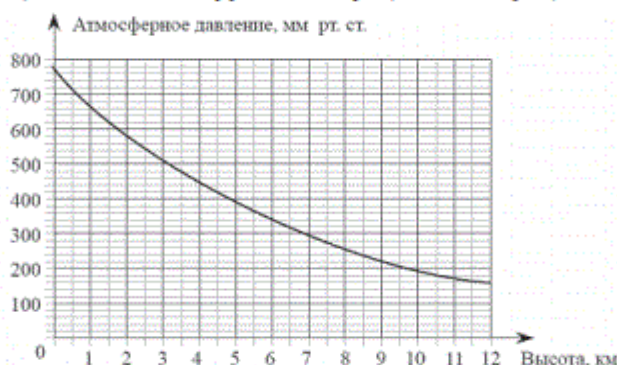
14

Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшая, отборная, первая, вторая и третья. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо, массой 71,2 г.

Категория	Масса одного яйца, не менее, г
Высшая	75,0 и выше
Отборная	65,0 - 74,9
Первая	55,0 - 64,9
Вторая	45,0 - 54,9
Третья	35,0 - 44,9

15

На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах).



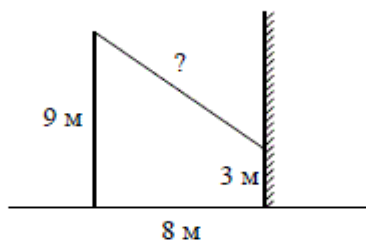
На сколько миллиметров ртутного столба отличается давление на высоте 2 км от давления на высоте 8 км?

16

Спортивный магазин проводит акцию: «Любая футболка по цене 200 р. При покупке двух футболок – скидка на вторую 80%». Сколько рублей придётся заплатить за покупку двух футболок?

17

От столба высотой 9 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Расстояние от дома до столба 8 м. Вычислите длину провода.



18

В среднем каждый ученик класса, в котором учится Сережа, тратит на дорогу до школы 36 минут. Сережа тратит на дорогу 10 минут. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Обязательно найдется ученик класса, который тратит на дорогу более 40 минут.
- 2) Обязательно найдется ученик класса, который тратит на дорогу ровно 36 минут.
- 3) В классе каждый ученик, кроме Сережи, тратит на дорогу более 36 минут.
- 4) Обязательно найдется ученик, который тратит на дорогу тратит более 36 минут.

19

На тарелке лежат пирожки, одинаковые на вид: 8 с мясом, 4 с капустой и 3 с вишней. Катя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с вишней.

20

Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$, где b и c – стороны треугольника, а α – угол между этими сторонами. Пользуясь этой формулой, найдите $\sin \alpha$, если $S = 9$, $c = 3$, а $b = 8$.

Модуль "Часть 2"

21

Упростите выражение $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 2x} - \frac{2x + 7}{x} - \frac{x + 8}{x - 2}$.

22

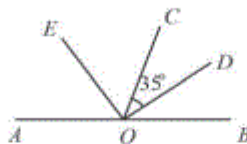
Один из корней уравнения $5x^2 - 2x + 3p = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

23

Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1| + x - 2$ и найдите значения m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

24

Найдите величину угла COE , если OE – биссектриса угла AOC , OD – биссектриса угла COB .



25

В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина стороны AB . Известно, что $KC = KD$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

26

Две окружности с центрами O_1 и O_3 и радиусами 7 и 6 касаются друг с другом внешним образом и внутренним образом касаются окружности с центром O_2 радиусом 14. Найдите угол $O_1O_2O_3$.

Тест № 2

1

В каких случаях вычисление выполнено верно? Выпишите соответствующие номера.

1) $1,4 \cdot \frac{3}{7} = 0,6$

2) $1 : \frac{4}{7} = \frac{7}{4}$

3) $0,7 + \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$

2

На координатной прямой отмечены точки x и y .



Какое из следующих неравенств верно?

1) $-x < -y$

2) $x - y \geq 0$

3) $1 - x > y$

4) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

3

В каком случае числа $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ и 4 расположены в порядке возрастания?

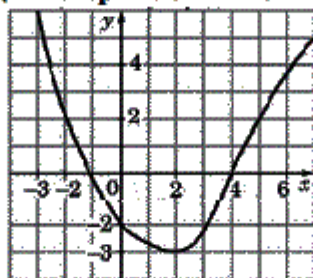
- 1) $2\sqrt{3}$; 4; $3\sqrt{2}$
- 2) $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; 4
- 3) $3\sqrt{2}$; 4; $2\sqrt{3}$
- 4) 4; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$

4

Найдите корни уравнения $16x^2 - 1 = 0$.

5

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Какие из утверждений относительно этой функции **неверны**? Укажите их номера.



- 1) функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$
- 2) $f(3) > f(-3)$
- 3) $f(0) = -2$
- 4) прямая $y = 2$ пересекает график в точках $(-2; 2)$ и $(5; 2)$

7

Упростите выражение $\frac{b}{a^2 - b^2} : \frac{b}{a^2 + ab}$ и найдите его значение при $a = -0,7$, $b = 2,1$.

8

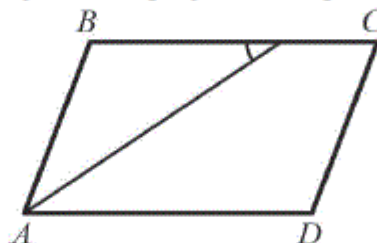
Решите неравенство $x^2 < 361$.

- 1) $(-\infty; -19) \cup (19; +\infty)$
- 2) $(-\infty; -19] \cup [19; +\infty)$
- 3) $(-19; 19)$
- 4) $[-19; 19]$

Модуль "Геометрия"

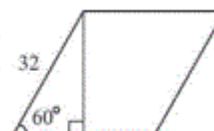
9

Найдите величину острого угла C параллелограмма, изображённого на рисунке, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 35° .



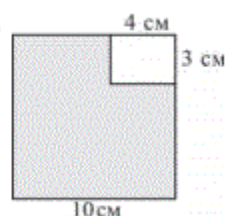
10

Сторона ромба равна 32, а острый угол равен 60° . Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?



11

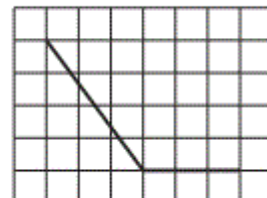
Из квадрата со стороной 10 см вырезан прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Найдите площадь оставшейся части. Ответ дайте в см^2 .



12

На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён угол. Найдите его косинус.

Ответ: _____



13

Укажите номера верных утверждений.

- 1) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 2) В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является одновременно и высотой.
- 3) Каждая сторона треугольника больше суммы двух других сторон.

Модуль "Конкретно Реальная математика"

14

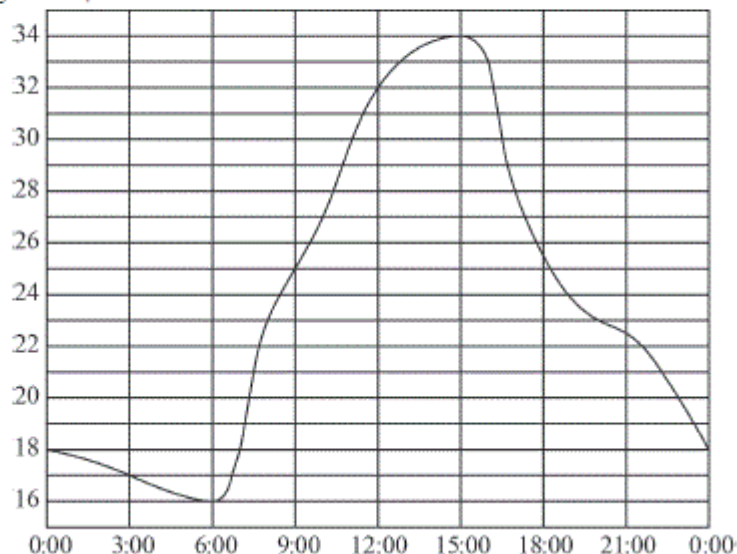
В таблице приведены нормативы по прыжкам в длину с места для 11 класса.

	Мальчики	Мальчики	Мальчики	Девочки	Девочки	Девочки
Отметка	«3»	«4»	«5»	«3»	«4»	«5»
Дальность (в см)	200	220	230	155	170	185

Какую отметку получит мальчик, прыгнувший на 215 см?

- | | |
|------------------------|--------|
| 1) неудовлетворительно | 3) «4» |
| 2) «3» | 4) «5» |

- 15** На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значением температуры в первой половине этих суток. Ответ дайте в градусах Цельсия.



- 16** Малина на рынке стоит 160 рублей за килограмм, а в супермаркете — 200 рублей за килограмм. На сколько процентов малина на рынке дешевле, чем в супермаркете?

- 17** Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают ровно 8 часов?

- 18** В среднем каждый ученик класса, в котором учится Сережа, тратит на дорогу до школы 36 минут. Сережа тратит на дорогу 10 минут. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Обязательно найдется ученик класса, который тратит на дорогу более 40 минут.
- 2) Обязательно найдется ученик класса, который тратит на дорогу ровно 36 минут.
- 3) В классе каждый ученик, кроме Сережи, тратит на дорогу более 36 минут.
- 4) Обязательно найдется ученик, который тратит на дорогу тратит более 36 минут.

- 19** Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 65 до 89 делится на 6?

- 20** Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$, где b и c — стороны треугольника, а α — угол между этими сторонами. Пользуясь этой формулой, найдите площадь треугольника, если $\alpha = 30^\circ$, $c = 5$, $b = 6$.

Модуль "Часть 2"

- 21** Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + y = 5, \\ \frac{x+2}{5} + \frac{y}{2} = -1. \end{cases}$$

22

Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 130 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 136 литров?

23

Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 3x})^2}{x}$. Найдите значения a , при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

24

Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 24, а ее периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.

25

Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Докажите, что он параллелограмм.

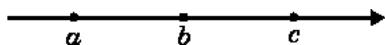
26

Диагонали четырехугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M . Известно, что $\angle ABC = 74^\circ$, $\angle BCD = 102^\circ$, $\angle AMD = 112^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

Тест № 3
Модуль "Алгебра"

Задание 1. Вычислите: $\frac{9}{4} + \frac{8}{5}$

Задание 2. На координатной прямой отмечены числа a , b и c .



Какая из разностей $a - b$, $a - c$, $c - b$ положительна?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) $a - b$
- 2) $a - c$
- 3) $c - b$
- 4) ни одна из них

Задание 3. В какое из следующих выражений можно преобразовать дробь $\frac{z^{-8} \cdot z}{z^{-4}}$?

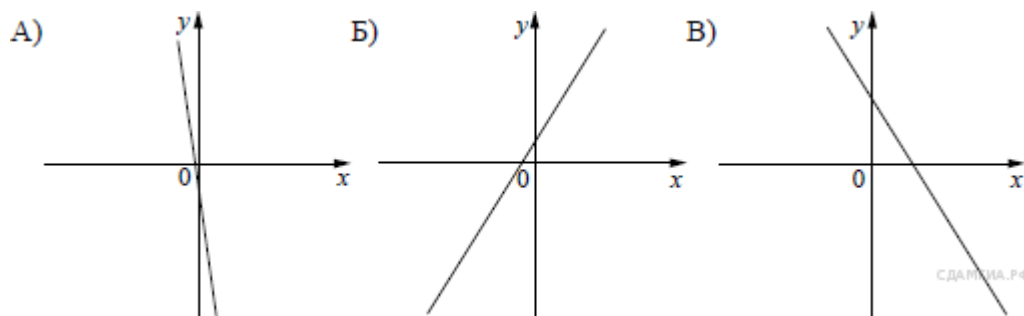
- 1) z^{-3}
- 2) z^{-11}
- 3) z^3
- 4) z^{-1}

Задание 4. Решите уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Задание 5. На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между знаками коэффициентов k и b и графиками функций.

Графики



Коэффициенты

- 1) $k > 0$, $b < 0$
- 2) $k < 0$, $b < 0$
- 3) $k < 0$, $b > 0$
- 4) $k > 0$, $b > 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

Задание 6. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-7,2; -6,9; \dots$

Задание 7. Найдите значение выражения $\frac{1}{4x} - \frac{4x+y}{4xy}$ при $x = \sqrt{42}, y = \frac{1}{2}$.

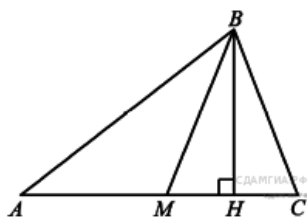
Задание 8. Решите неравенство $9x + 8 > 8x - 8$

В ответе укажите номер правильного варианта.

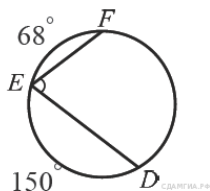
- 1) $(-\infty; -16)$
- 2) $(-16; +\infty)$
- 3) $(-\infty; 0)$
- 4) $(0; +\infty)$

Модуль "Геометрия"

Задание 9. В треугольнике ABC проведены медиана BM и высота BH . Известно, что $AC = 79$ и $BC = BM$. Найдите AH .

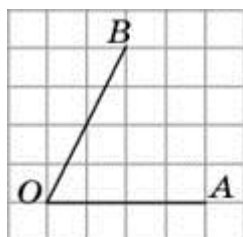


Задание 10. Найдите $\angle DEF$, если градусные меры дуг DE и EF равны 150° и 68° соответственно.



Задание 11. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, основание — $10\sqrt{2+\sqrt{2}}$, а угол, лежащий напротив основания, равен 135° . Найдите площадь треугольника, деленную на $\sqrt{2}$.

Задание 12. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на рисунке.



Задание 13. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Любые три прямые имеют не более одной общей точки.
- 2) Если угол равен 120° , то смежный с ним равен 120° .
- 3) Если расстояние от точки до прямой больше 3, то и длина любой наклонной, проведённой из данной точки к прямой, больше 3.

Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Модуль "Реальная математика"

Задание 14. Для квартиры площадью 50 м^2 заказан натяжной потолок белого цвета. Стоимость работ по установке натяжных потолков приведена в таблице.

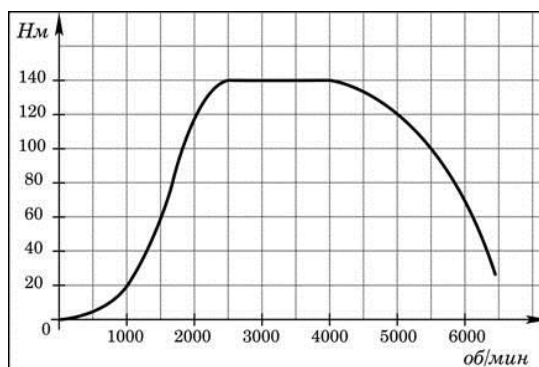
Цвет потолка	Цена (в руб.) за 1 м^2 (в зависимости от площади помещения)			
	до 10 м^2	от 11 до 30 м^2	от 31 до 60 м^2	свыше 60 м^2
белый	1050	850	700	600
цветной	1200	1000	950	850

Какова стоимость заказа, если действует сезонная скидка в 10%?

В ответе укажите номер правильного варианта.

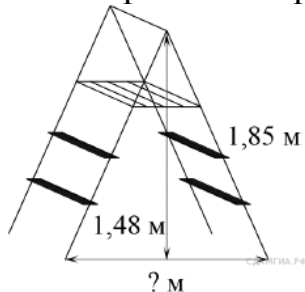
- 1) 35 000 руб.
- 2) 3 500 руб.
- 3) 34 990 руб.
- 4) 31 500 руб.

Задание 15. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. На сколько больше оборотов в минуту станет совершать двигатель при увеличении крутящего момента с $20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ до $140 \text{ Н} \cdot \text{м}$?

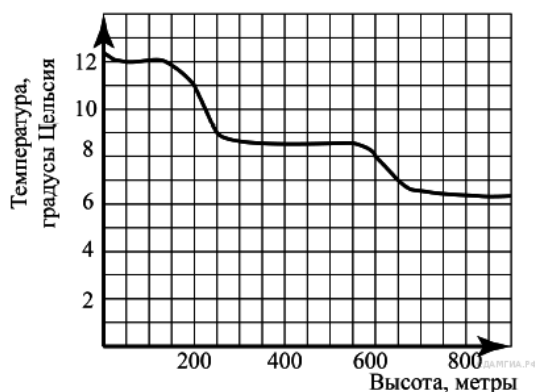


Задание 16. Спортивный магазин проводит акцию: «Любая футболка по цене 200 рублей. При покупке двух футболок — скидка на вторую 75%». Сколько рублей придётся заплатить за покупку двух футболок?

Задание 17. Длина стремянки в сложенном виде равна 1,85 м, а её высота в разложенном виде составляет 1,48 м. Найдите расстояние (в метрах) между основаниями стремянки в разложенном виде.



Задание 18. На рисунке изображена зависимость температуры (в градусах Цельсия) от высоты (в метрах) над уровнем моря.



Определите по графику, на сколько градусов температура на высоте 200 метров выше, чем на высоте 650 метров.

Задание 19. На экзамене по биологии школьнику достаётся один случайно выбранный вопрос из списка. Вероятность того, что этот вопрос на тему «Членистоногие», равна 0,15. Вероятность того, что это окажется вопрос на тему «Ботаника», равна 0,45. В списке нет вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Задание 20. Площадь любого выпуклого четырехугольника можно вычислять по формуле $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin a$, где d_1 , d_2 — длины его диагоналей, а a угол между ними. Вычислите $\sin a$, если $S = 21$, $d_1 = 7$, $d_2 = 15$.

Модуль "Часть 2"

Задание 21. Сократите дробь $\frac{2^{m+2} \cdot 21^{m+3}}{6^{m+1} \cdot 7^{m+2}}$.

Задание 22. От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 280 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним, со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй.

Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно.

Задание 23. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Задание 24. Стороны AC , AB , BC треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ и 1 соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC , причём отрезок KC пересекает сторону AB в точке, отличной от B . Известно, что треугольник с вершинами K , A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC , если $\angle KAC > 90^\circ$

Задание 25. В остроугольном треугольнике ABC точки A , C , точка пересечения высот H и центр вписанной окружности I лежат на одной окружности. Докажите, что угол ABC равен 60° .

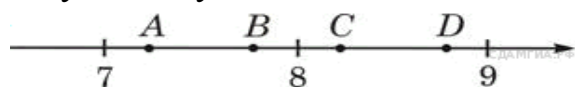
Задание 26. Длина катета AC прямоугольного треугольника ABC равна 8 см. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AM:MB = 16:9$.

Тест № 4

Модуль "Алгебра"

Задание 1. Найдите значение выражения $0,46 \cdot (-10)^3 + 1,3 \cdot (-10)^2 + 870$

Задание 2. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{52}$.



Какая это точка?

- 1) точка A
- 2) точка B
- 3) точка C
- 4) точка D

Задание 3. Численность населения Китая составляет $1,3 \cdot 10^9$ человек, а Вьетнама — $8,5 \cdot 10^7$ человек. Во сколько раз численность населения Китая больше численности населения Вьетнама?

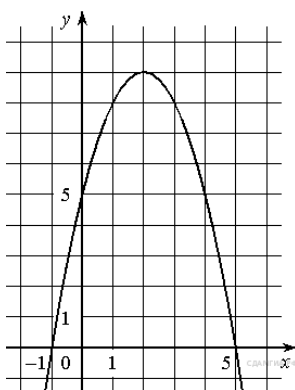
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) примерно в 6,5 раз
- 2) примерно в 15 раз
- 3) примерно в 150 раз
- 4) примерно в 1,5 раза

Задание 4. Решите уравнение $3 - \frac{x}{3} = \frac{x}{2}$.

Задание 5. На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$.

Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера.



- 1) Наибольшее значение функции равно 9
- 2) Функция убывает на промежутке $(-\infty; 2]$
- 3) $f(x) < 0$ при $x < 2$

Задание 6. Дана арифметическая прогрессия: $-15, -8, -1, \dots$. Какое число стоит в этой последовательности на 6-м месте?

Задание 7. Упростите выражение $(a-3)^2 - a(5a-6)$, найдите его значение при $a = -\frac{1}{2}$. В ответ запишите полученное число.

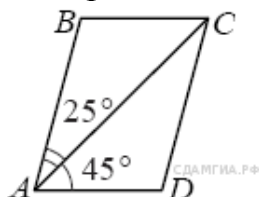
Задание 8. Решение какого из данных неравенств изображено на рисунке?



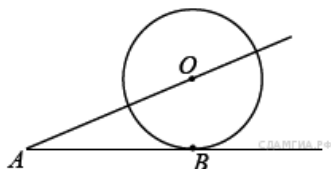
- 1) $x^2 - 25 \leq 0$
- 2) $x^2 + 25 \leq 0$
- 3) $x^2 + 25 \geq 0$
- 4) $x^2 - 25 \geq 0$

Модуль "Геометрия"

Задание 9. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует с его сторонами углы, равные 45° и 25° . Найдите больший угол параллелограмма.



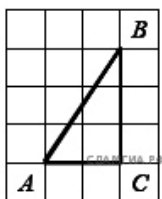
Задание 10. К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO . Найдите радиус окружности, если $AB = 14$ см, $AO = 50$ см.



Задание 11. Площадь ромба равна 54, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.



Задание 12. Найдите тангенс угла A треугольника ABC , изображённого на рисунке.



Задание 13. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Если угол равен 45° , то вертикальный с ним угол равен 45° .
 - 2) Любые две прямые имеют ровно одну общую точку.
 - 3) Через любые три точки проходит ровно одна прямая.
 - 4) Если расстояние от точки до прямой меньше 1, то и длина любой наклонной, проведенной из данной точки к прямой, меньше 1.
- Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Модуль "Реальная математика"

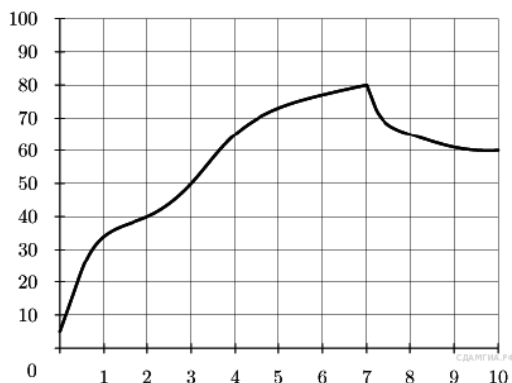
Задание 14. В таблице даны результаты забега девочек 8 класса на дистанцию 60 м. Зачет выставляется при условии, что показан результат не хуже 10,8 с.

Номер дорожки	I	II	III	IV
Время (в с)	10,7	10,9	9,8	11,4

Укажите номера дорожек, по которым бежали девочки, не получившие зачет. В ответе укажите номер правильного варианта.

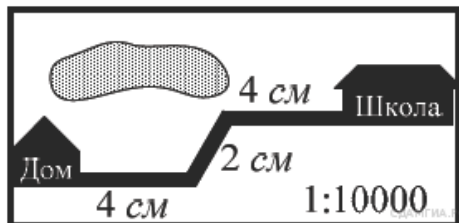
- 1) только II 2) только III 3) II, IV 4) I, III

Задание 15. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался до температуры 50°C с момента запуска двигателя.

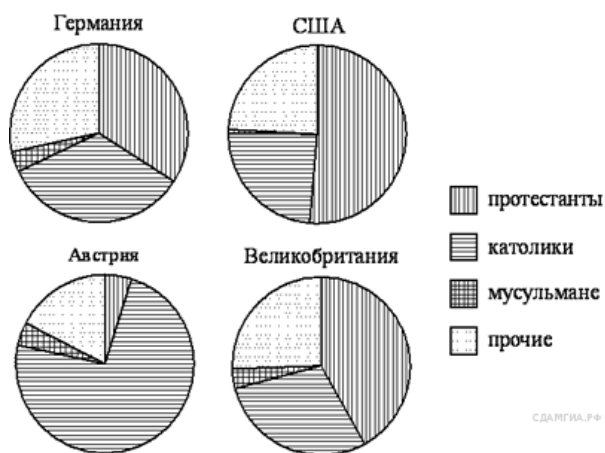


Задание 16. Спортивный магазин проводит акцию: «Любая футболка по цене 300 рублей. При покупке двух футболок — скидка на вторую 60%». Сколько рублей придётся заплатить за покупку двух футболок?

Задание 17. На карте показан путь Лены от дома до школы. Лена измерила длину каждого участка и подписала его. Используя рисунок, определите, длину пути (в м), если масштаб 1 см: 10000 см.



Задание 18. На диаграмме показаны религиозные составы населения Германии, США, Австрии и Великобритании. Определите по диаграмме, в какой стране доля католиков превышает 50%.



- 1) Германия
- 2) США
- 3) Австрия
- 4) Великобритания

Задание 19.. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

Задание 20. Длину биссектрисы треугольника, проведённой к стороне a , можно вычислить по формуле $l_0 = \frac{2bc \cos \frac{a}{2}}{b+c}$. Вычислите $\cos \frac{a}{2}$, если $b = 1$, $c = 3$, $l_0 = 1,2$.

Модуль "Часть 2"

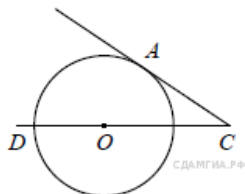
Задание 21. Решите уравнение $-3x^2 - 14x - 7 = (x-1)^2$.

Задание 22. Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь

против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Задание 23. Постройте график функции $y = x^2 - x + 3 - 3|x|$ и найдите все значения a , при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y = a - 4$.

Задание 24. Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 100° .



Задание 25. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника AMD .

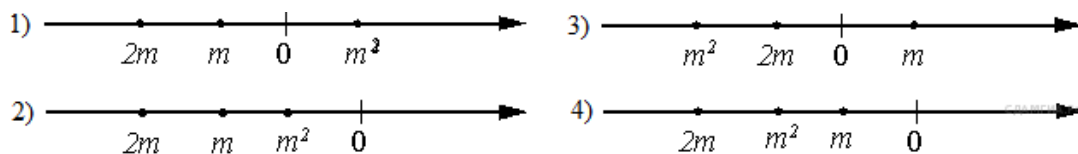
Задание 26. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6. Окружность радиуса 4,5 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Тест № 5

Модуль "Алгебра"

Задание 1. Найдите значение выражения $6,4 - 7 \cdot (-3,3)$.

Задание 2. Известно, что число m отрицательное. На каком из рисунков точки с координатами $0, m, 2m^2$ расположены на координатной прямой в правильном порядке?



В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Задание 3. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{18}{17}$ и $\frac{17}{15}$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

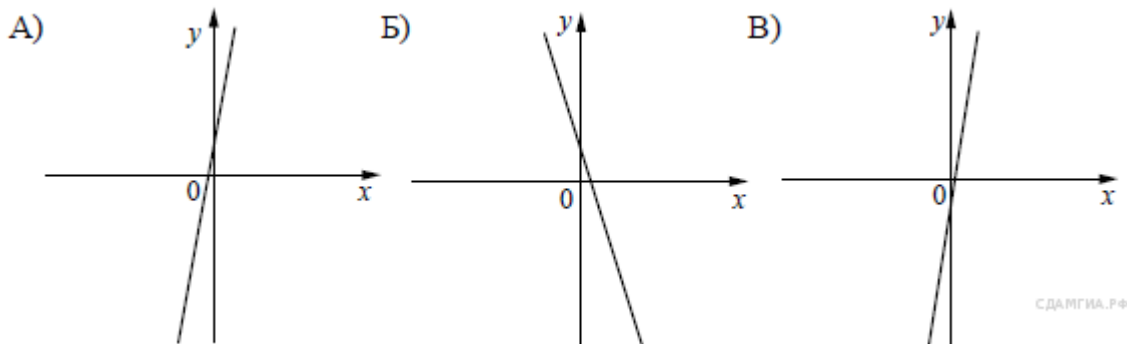
- 1) 0,8
2) 0,9
3) 1
4) 1,1

Задание 4. Решите уравнение $x^2 + 7x - 18 = 0$.

Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Задание 5. На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b .

Графики



Коэффициенты

- 1) $k < 0, b > 0$ 2) $k > 0, b > 0$ 3) $k < 0, b < 0$ 4) $k > 0, b < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

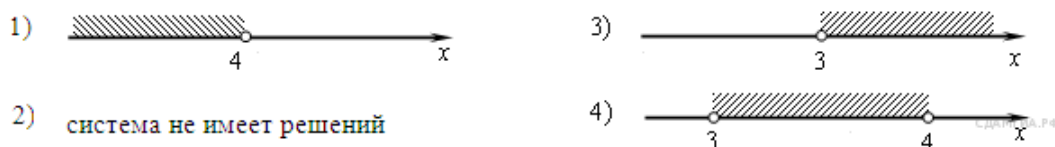
А	Б	В

Задание 7. Упростите выражение $\frac{a+x}{a} : \frac{ax+x^2}{a^2}$, найдите его значение при $a = 23, x = 5$. В ответ запишите полученное число.

Задание 8. Решите систему неравенств $\begin{cases} x > 3 \\ 4 - x > 0 \end{cases}$.

На каком рисунке изображено множество её решений?

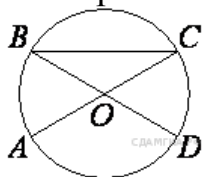
В ответе укажите номер правильного варианта.



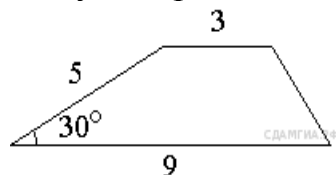
Модуль "Геометрия"

Задание 9. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 80° , угол CAD равен 54° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

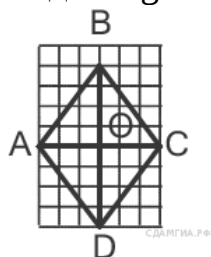
Задание 10. В окружности с центром O AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 130° . Найдите вписанный угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Задание 11. Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилежающих к ней углов равен 30° . Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.



Задание 12. На рисунке изображен ромб $ABCD$. Используя рисунок, найдите $\operatorname{tg} \angle OBC$.



Задание 13. Укажите номера неверных утверждений.

- 1) При пересечении двух параллельных прямых третьей прямой сумма накрест лежащих углов равна 180° .
- 2) Диагонали ромба перпендикулярны.
- 3) Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения его биссектрис.

Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.



Задание 14.

На диаграмме показано количество посаженных деревьев и кустарников в г. Сочи за период с 2009 по 2012 гг. Определите, сколько всего было посажено зелёных насаждений за 2011 г. и 2012 г.?

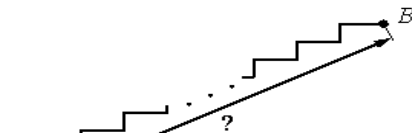
В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) 10 000
- 2) 4 000
- 3) 12 000
- 4) 8 000

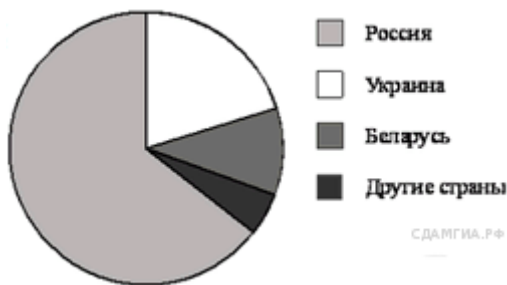
Задание 15. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты местности над уровнем моря (в километрах). На сколько миллиметров ртутного столба атмосферное давление на высоте Эвереста ниже атмосферного давления на высоте Мунку-Сардыка?



Задание 16. За 20 минут велосипедист проехал 7 километров. Сколько километров он проедет за 35 минут, если будет ехать с той же скоростью?



Задание 17. Лестница соединяет точки A и B и состоит из 20 ступеней. Высота каждой ступени равна 16,5 см, а длина — 28 см. Найдите расстояние между точками A и B (в метрах).



Задание 18.

На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 12 млн пользователей.

Какое из следующих утверждений неверно?

- 1) Пользователей из Украины больше, чем пользователей из Литвы.
- 2) Пользователей из Украины меньше четверти общего числа пользователей.

3) Пользователей из Беларуси больше 3 миллионов.

4) Пользователей из России больше, чем из всех остальных стран, вместе взятых.

Задание 19. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число, меньшее 4.

Задание 20. Закон Менделеева-Клапейрона можно записать в виде $PV = \nu RT$, где P — давление (в паскалях), V — объём (в м^3), ν — количество вещества (в молях), T — температура (в градусах Кельвина), а R — универсальная газовая постоянная, равная $8,31 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$. Пользуясь этой формулой, найдите температуру T (в градусах Кельвина), если $\nu = 68,2$ моль, $P = 37\,782,8 \text{ Па}$, $V = 6 \text{ м}^3$.

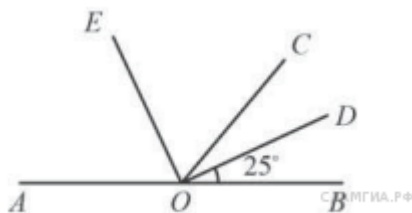
Модуль "Часть 2"

Задание 21. Решите неравенство $\frac{x^2}{3} < \frac{3x+3}{4}$

Задание 22. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 63 км/ч , проезжает мимо идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 3 км/ч пешехода за 57 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Задание 23. Постройте график функции $y = |x-3| - |x+3|$ и найдите все значения k , при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Задание 24. Найдите величину угла $\angle AOE$, если OE — биссектриса угла $\angle AOC$, OD — биссектриса угла $\angle COB$.



Задание 25. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника COD .

Задание 26. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 20 и 25 , а основание BC равно 5 . Биссектриса угла $\angle ADC$ проходит через середину стороны AB . Найдите площадь трапеции.

Тест № 6

Модуль "Алгебра"

Задание 1. Найдите значение выражения $(2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{5}) \cdot 16$

Задание 2. Известно, что $0 < a < 1$. Выберите наибольшее из чисел.

- 1) a^2 2) a^3 3) $\frac{1}{a}$ 4) $a - 1$

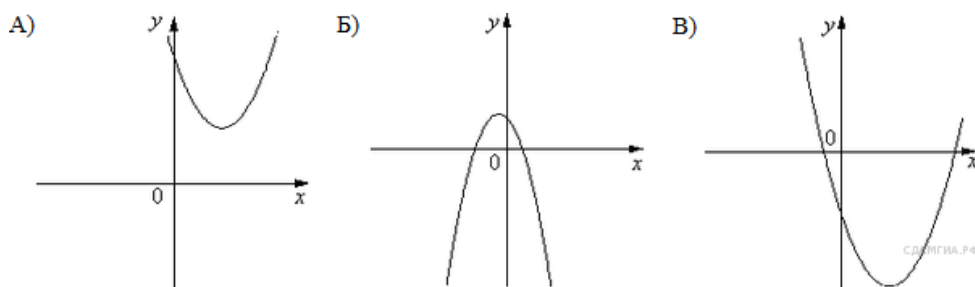
Задание 3. Представьте выражение $\frac{(c^{-3})^4}{c^{-17}}$ в виде степени с основанием c .

- 1) c^{18} 2) c 3) c^{-29} 4) c^{-16}

Задание 4. Решите уравнение $\frac{7}{x-5} = 2$.

Задание 5. На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c .

Графики



Коэффициенты

- 1) $a > 0, c > 0$ 2) $a > 0, c < 0$ 3) $a < 0, c > 0$ 4) $a < 0, c < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

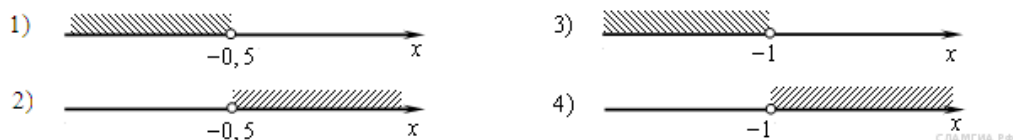
А	Б	В

Задание 6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: $-256; 128; -64; \dots$ Найдите сумму первых семи её членов.

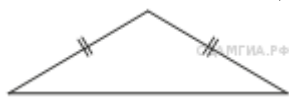
Задание 7. Упростите выражение $(a+2)^2 - a(4-7a)$ и найдите его значение при $a = -\frac{1}{2}$. В ответе запишите найденное значение.

Задание 8. Решите неравенство $8-5(x+3) > 1-7x$ и определите, на каком рисунке изображено множество его решений.

В ответе укажите номер правильного варианта.

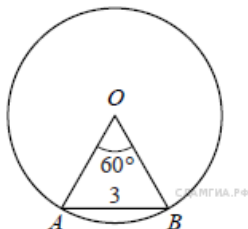


Модуль "Геометрия"

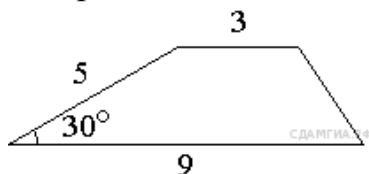


Задание 9. Площадь равнобедренного треугольника равна $196\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания равен 120° . Найдите длину боковой стороны.

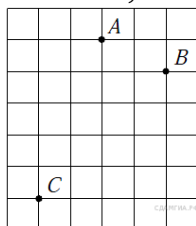
Задание 10. Центральный угол AOB , равный 60° , опирается на хорду AB длиной 3. Найдите радиус окружности.



Задание 11. Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилежающих к ней углов равен 30° . Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.



Задание 12. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A , B и C . Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC .



Задание 13. Укажите номера верных утверждений.

- 1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.
- 2) Треугольник со сторонами 1, 2, 4 существует.
- 3) Если в ромбе один из углов равен 90° , то такой ромб — квадрат.
- 4) В любом параллелограмме диагонали равны.

Модуль "Реальная математика"

Задание 14. В таблице приведены размеры штрафов за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации, установленных на территории России с 1 сентября 2013 года.

Превышение скорости, км/ч	21—40	41—60	61—80	81 и более
Размер штрафа, руб.	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 82 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 40 км/ч?

В ответе укажите номер правильного варианта.

- 1) 500 рублей
- 2) 1000 рублей
- 3) 2000 рублей
- 4) 5000 рублей

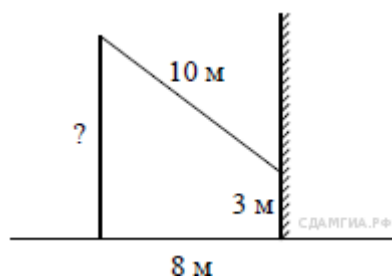
Задание 15. В таблице даны результаты забега мальчиков 8-го класса на дистанцию 60 м.

Номер дорожки	1	2	3	4
Время (с)	10,3	10,7	11,0	9,1

Зачёт выставляется, если показано время не хуже 10,5 с. Выпишите номера дорожек, по которым бежали мальчики, получившие зачёт.

Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Задание 16. На счет в банке, доход по которому составляет 15% годовых, внесли 24 тыс. р. Сколько тысяч рублей будет на этом счете через год, если никаких операций со счетом проводиться не будет?



Задание 17. От столба к дому натянут провод длиной 10 м, который закреплен на стене дома на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Вычислите высоту столба, если расстояние от дома до столба равно 8 м.

Задание 18. На диаграмме показан возрастной состав населения Японии. Определите по диаграмме, население какого возраста преобладает.



- 1) 0–14 лет
- 2) 15–50 лет
- 3) 51–64 лет
- 4) 65 лет и более

Задание 19. На экзамене по геометрии школьнику достаётся одна задача из сборника. Вероятность того, что эта задача по теме «Площадь», равна 0,45. Вероятность того, что это окажется задача по теме «Углы», равна 0,45. В сборнике нет задач, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется задача по одной из этих двух тем.

Задание 20. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 5 колец.

Модуль "Часть 2"

Задание 21. Решите систему уравнений

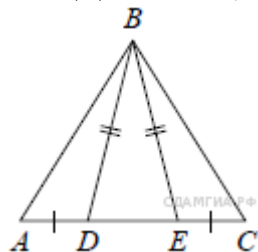
$$\begin{cases} y - 2x = 6, \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases}.$$

Задание 22. Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 55 км/ч, а вторую — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Задание 23. Известно, что графики функций $y = x^2 + p$ и $y = 4x - 5$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

Задание 24. Каждое основание AD и BC трапеции $ABCD$ продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов A и B этой трапеции пересекаются в точке K , биссектрисы внешних углов C и D пересекаются в точке E . Найдите периметр трапеции $ABCD$, если длина отрезка KE равна 28.

Задание 25. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны (см. рисунок). Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



Задание 26. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении 13:12, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 10$.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр
Основные теоретические понятия, формулы и теоремы	3
Основные геометрические теоремы и формулы	18
Демонстрационный материал (тесты)	28
Содержание	53
Литература	54

Литература

1. Мордкович, А.Г. Алгебра 7,8,9 [Текст]:учебник/ А.Г.Мордкович. – М.:Мнемозина,2012.
2. Мордкович, А.Г. Алгебра 7,8,9 [Текст]:задачник/ А.Г.Мордкович, Л.О.Денищева, Т.А.Корешкова, Т.Н. Мишустина, Е.Е.Тульчинская. – М.:Мнемозина,2012.
3. Макарычев Ю.Н., Алгебра 7,8,9 [Текст]:учебник/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.С.Муравин, С.В.Суворова – М.: Просвещение, 2011.
4. Атанасян Л.С. Геометрия 7 – 9 кл. [Текст]:учебник/ Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Л.С.Киселева, Э.Г.Поздняк – М.: Просвещение, 2014.
5. Погорелов А.В. Геометрия 7 – 9кл. [Текст]:учебник/ А.В.Погорелов – М.:»Просвещение» 2012.

Полезные сайты для подготовки к ОГЭ

1. <http://www.fipi.ru/>
2. <http://sdamgia.ru/>
3. <http://alexlarin.net/>
4. <https://www.youtube.com/> Подготовка к ГИА(ОГЭ) 2015-2016 по математике