НЕФТЕЮГАНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
(филиал) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Югорский Государственный Университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению самостоятельной работы

по дисциплине МАТЕМАТИКА

для специальности 38.02.01
Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Нефтеюганск
2016

ОДОБРЕНА Предметной (цикловой) комиссией Протокол № 1 от 15.09.16 Председатель П(Ц)К __________ О.В. Тарбар	Утверждена заседанием методсовета Протокол № 1 от 22.09.16 Председатель методсовета __________ Н.И. Савватеева

Разработал О.В. Бурдина – преподаватель НИК (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ»

Содержание

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению самостоятельной работы по дисциплине МАТЕМАТИКА для специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям) (далее – методические указания) составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины Математика для специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

Содержание методических указаний соответствует требованиям Федерального государственного стандарта среднего профессионального образования специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям).

Целью методических указаний является обеспечение эффективности самостоятельной работы обучающихся на основе организации их выполнения.

Задачами методических указаний по организации самостоятельной работы являются:

– активизация самостоятельной работы студентов;
– управление познавательной деятельностью студентов;
– содействие развития творческого отношения к данной дисциплине;
– выработка умений и навыков рациональной работы;
– повышение качества подготовки к занятиям.

Методические указания состоят из карты самостоятельной работы студента, порядка выполнения самостоятельной работы студентом и списка рекомендуемой литературы.

В карте самостоятельной работы указаны наименования самостоятельных работ и тем, к которым они относятся, виды заданий и формы контроля для самостоятельного выполнения, указано время, планируемое для выполнения каждой самостоятельной работы.

В разделе «Порядок выполнения самостоятельной работы студентом» даются методические рекомендации и порядок выполнения каждой самостоятельной работы, дается достаточный объем теоретического материала, приведены примеры решения типичных заданий, рекомендована литература.

Для выполнения самостоятельной работы необходимо пользоваться конспектами занятий, рекомендованной учебной литературой, Интернет-ресурсами или другими источниками по усмотрению студента.

При изучении дисциплины предусматриваются следующие формы самостоятельной работы студента:

– составление опорных конспектов;
– выполнение домашней контрольной работы
– подготовка к экзамену.

Задания для домашней контрольной выдаются преподавателем.

Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем в аудитории.

Предусмотрен вид контроля:

– проверка письменной работы.

Результаты контроля используются для оценки текущей успеваемости студентов.
Оценка текущей успеваемости студентов выставляется преподавателем в учебный журнал.

В дальнейшем пособие может перерабатываться при изменении рабочей программы, Федеральных государственных стандартов.

1. КАРТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

№ работы	Наименование темы	Наименование самостоятельной работы	Вид работы	Часы	
1	*Решение прикладных задач с использованием МК.*	Выполнение домашней контрольной работы по теме: Решение прикладных задач с использованием МК	Письменная работа	2	ОК 2,4
2	*Решение прикладных задач на вычисление процентов.*	Составление опорного конспекта по теме: Вычисление процентов	Письменная работа	1	ОК 2,4
3		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Решение прикладных задач на вычисление процентов.	Письменная работа	2	ОК 2,4
4	*Функция. Предел функции. Непрерывность функции*	Составление опорного конспекта по теме: Функция.	Письменная работа	1	ОК 4
5		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Вычисление пределов функций с помощью различных методов и замечательных пределов	Письменная работа	2	ОК 8
6		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Непрерывность функции. Точки разрыва	Письменная работа	2	ПК 2.4
7	*Производная функции.*	Составление опорного конспекта по теме: Производная	Письменная работа	1	ОК 2,4
8		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Производная сложной функции	Письменная работа	2	ОК 2,4
9		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Исследование функции с помощью производной	Письменная работа	2	ОК 2,4
10	*Интегральное исчисление.*	Составление опорного конспекта по теме: Неопределенный интеграл. Определенный интеграл	Письменная работа	2	ОК 2,4
11		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Приложение интеграла к решению прикладных задач	Письменная работа	2	ОК 2,4
12	*Матрицы, определители.*	Составление опорного конспекта по теме: Матрицы, операции над ними.	Письменная работа	1	ОК 2,4

13		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Выполнение действий над матрицами. Вычисление определителей.	Письменная работа	2	ОК 2,4
14		Выполнение домашней работы по теме: Вычисление определителей. Составление матрицы, обратной данной.	Письменная работа	2	ОК 2,4
15	*Решение систем линейных уравнений.*	Составление опорного конспекта по теме: Решение систем линейных уравнений матричным методом	Письменная работа	1	ОК 2,4
16		Выполнение домашней контрольной работы по теме: Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, методом Крамера и матричным методом	Письменная работа	2	ОК 2,4
17	*Комплексные числа, заданные в алгебраической и тригонометрической форме, и действия над ними*	Составление опорного конспекта по теме: Основы теории комплексных чисел	Письменная работа	1	ОК 2,4
18		Выполнение домашней контрольной работы по теме : Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической форме	Письменная работа	2	ОК 2,4
19	*Множества и отношения*	Составление опорного конспекта по теме: Множества. Операции над множествами	Письменная работа	1	ОК 2,4
20		Выполнение домашней работы по теме: Операции над множествами.	Письменная работа	2	ОК 2,4
21	*Элементы теории вероятностей.*	Составление опорного конспекта по теме: Элементы теории вероятностей	Письменная работа	1	ОК 2,4
22		Выполнение домашней контрольной работы по теме :Решение задач с применением элементов комбинаторики на вычисление вероятностей событий».	Письменная работа	2	ОК 2,4
23	*Элементы математической статистики*	Составление опорного конспекта по теме: Элементы математической статистики	Письменная работа	1	ОК 2,4
		Выполнение домашней контрольной работы по теме: «Построение гистограмм и полигонов частот с использованием статистических данных выборки»	Письменная работа	2	ПК 2.1 - 2.4
24		Подготовка к экзамену		1	

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОМ

2.1Методические рекомендации по выполнению различных видов самостоятельной работы.

2.1.1. Методические рекомендации по подготовке сообщения.

Методические указания

1. Найти информацию в сети интернет.
2. Подготовить сообщение в письменном виде.
3. Составить выступление на 3-4 минуты.
4. Выучить выступление для устного ответа.

Критерии оценки:

оценка «5», если студент рассказывает, а не читает выступление, рассказ аргументированный, четкий;

оценка «4», если студент рассказывает, заглядывая в текст выступления;

оценка «3», если студент читает выступление;

оценка «2», если студент не подготовил сообщение.

2.1.2 Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы.

Контрольная работа — промежуточный метод проверки знаний обучающегося с целью определения конечного результата освоения данной темы или раздела.

Домашняя контрольная работа проводится по конкретной теме. Она призвана систематизировать знания, позволяет повторить и закрепить материал. При ее выполнении обучающиеся могут использовать любые учебные пособия, консультации преподавателя.

Повторите теоретический материал по контролируемой теме. Выполните задания в соответствии с требованиями к оформлению работ.

Общие требования к оформлению работ:

1) домашние контрольные работы выполняются в отдельной тетради; должен быть указан вариант, тема контрольной работы;
2) работа должна быть выполнена аккуратно;
3) все преобразования должны быть выполнены последовательно;
4) при выполнении чертежей должны быть указаны названия осей координат, единичные отрезки;
5) при решении задач сначала запишите формулу, потом вычисления.

Методические указания:

1. Изучить теоретический материал.
2. Разобрать примеры решения.
3. Выполнить индивидуальные задания в тетради для практических работ с подробными объяснениями

Критерии оценки:

оценка «5», если выполнены все задания, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению, допускается 1 ошибка;

оценка «4», если выполнены все задания, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению, допускается не более 4 ошибок;

оценка «3», если выполнено более половины заданий, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению;

оценка «2», если выполнено менее половины заданий.

2.1.3. Методические рекомендации по составлению опорного конспекта.

Методические указания:

1. Написать название темы.
2. Выписать основные формулы, алгоритм решения типового задания..
3. Привести примеры применения формул, алгоритма решения.
4. Выучить формулы и алгоритм решения.

Критерии оценки:

оценка «зачтено», если опорный конспект выполнен;

оценка «не зачтено», если опорный конспект не выполнен.

2.1.4. Методические рекомендации по подготовке к экзамену.

Подготовить ответы на теоретические вопросы, решить практические задания.

2.2 Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы.

Самостоятельная работа №1

Выполнение домашней контрольной работы по теме: Решение прикладных задач с использованием МК

Методические указания: *выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.2.*

Самостоятельная работа № 2

Составление опорного конспекта по теме: Вычисление процентов.

Методические указания:

1. Записать определение процента, основные правила решения задач на проценты
2. К каждому правилу привести задачу и решить ее.

Самостоятельная работа №3

Выполнение домашней контрольной работы по теме: Решение прикладных задач на вычисление процентов.

Методические указания:

1. Изучить теоретический материал.
2. Разобрать примеры решения.
3. Выполнить работу в тетради для практических работ с подробными объяснениями

Теоретический материал:

Основные правила решения задач на проценты:

1) Чтобы найти процент от числа, нужно число умножить на процент.

2) Чтобы найти число по его проценту, нужно его известную часть разделить на то, сколько процентов она составляет от числа.

3) Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, нужно ту часть, о которой спрашивается, разделить на общее количество и умножить на 100 %.

Задачи:

1) Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

2) Предприятие изготовило за квартал 900 насосов высшей категории качества, они составляют 60 % всех насосов. Сколько всего насосов изготовило предприятие?

3) Из 200 деталей 16 оказались нестандартными. Сколько процентов всех деталей составили нестандартные?

Решение задач:

Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

Решение:

Найдем 60 % от 500 (общее количество насосов).

60 % = 0,6

500 • 0,6 = 300 насосов высшей категории качества.

Ответ: 300 насосов высшей категории качества.

Предприятие изготовило за квартал 500 насосов высшей категории качества, они составляют 60 % всех насосов. Сколько всего насосов изготовило предприятие?

Решение:

Итак, нам известно сколько всего насосов высшей категории. Но мы знаем, что эта часть составляет 60 % от общего количества.

60 % = 0,6

900 : 0,6 = 1500 насосов высшей категории качества

Ответ: 1500 насосов.

Из 200 деталей 16 оказались нестандартными. Сколько процентов всех деталей составили нестандартные?

Решение:

О чем спрашивают? О нестандартных деталях. Значит, 16 делим на общее количество деталей и умножаем на 100 %.

$$(16 : 200) \cdot 100\% = \frac{16}{200} \cdot 100\ \% = \frac{2}{25} \cdot 100\ \% = \frac{200\ \%}{25} = 8\ \%$$

Ответ: 8 % - составляют нестандартные от всех деталей.

Самостоятельная работа № 4

Составление опорного конспекта по теме: «Функция»

Методические указания:

1.Записать определение: функции; функции, непрерывной в точке x_0, функции, непрерывной на некотором промежутке. точек разрыва функции, их виды.

2.К каждому определению сделать рисунок.

Самостоятельная работа № 5

Выполнение домашней контрольной работы по теме: Вычисление пределов функций с помощью различных методов и замечательных пределов

Методические указания

1.Изучить теоретический материал.

2.Разобрать примеры решения.

3.Выполнить работу в тетради для практических работ с подробными объяснениями.

Теоретический материал:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, быть может, за исключением самой точки x_0.

Определение 1. Число А называется пределом функции $y= f(x)$ при x стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любой последовательности аргументов $x_n \to x_0$ соответствующая последовательность значений функций $f(x_n) \to$ А.

Если А есть предел функции $f(x)$ в точке x_0, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Заметим, что если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой (бесконечно большой) при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая (бесконечно малая) при $x \to x_0$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки а, возможно, за исключением самой точки а, и существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то существуют пределы их суммы $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$, произведения $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ и, если $g(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то и частного $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеют место равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to} g(x)$,

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, при $g(x)\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Свойства пределов

1.Постоянный множитель может быть вынесен из-под знака предела.

$\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2.Предел разности равен разности пределов.

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3.Предел степени равен степени предела.

Если $n \in N$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$

Пример. Вычислить пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$, б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-3x}{x^2+1}$, в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-7}{x^3+3}$, г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-5x}{x-2}$,

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}(x-1) = 3-1 = 2$.

Так как при x=3, числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Числитель раскладываем на множители $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$ по формуле $ax^2+вx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

$$б)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{6x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{6-0}{1+0} = 6.$$

Так как числитель и знаменатель дроби обращаются в ∞, то частное $\dfrac{\infty}{\infty}$ неопределенно.

Делим числитель и знаменатель дроби на x^2.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-7}{x^3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{7}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{0-0}{1+0}=\dfrac{0}{1}=0$.

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^4}{x^4}-\dfrac{5x}{x^4}}{\dfrac{x}{x^4}-\dfrac{2}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{x^4}}{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}=\dfrac{1-0}{0-0}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Самостоятельная работа №6

Выполнение домашней контрольной работы по теме: «Непрерывность функции. Точки разрыва».

Исследовать функцию на непрерывность

а) $y=\dfrac{1}{x-2}$, б) $y=\begin{cases}2x-1, если x\le 2,\\ 2x+1, если x\rangle 2.\end{cases}$.

Теоретический материал:

Определение 1. Функция f(x) называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (следовательно, и в самой точке x_0), существует предел функции при $x\to x_0$ и он равен значению функции в этой точке: .$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Определение 2. Функция называется ***непрерывной на некотором промежутке***, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Определение 3. Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва*** этой функции.

Определение 4. Точка разрыва функции называется ***точкой разрыва первого рода***, если в ней функция имеет конечные левый и правый пределы. Все остальные точки разрыва называются ***точками разрыва второго рода***.

Пример. Найти точки разрыва функции и определить их род.

а) $y=\dfrac{1}{x-2}$.

Решение. Область определения функции D(y)=$(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 2_-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2_+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$, точка 2 – точка разрыва 2 рода.

б) $y=\begin{cases}2x-1, если x\le 2,\\ 2x+1, если x\rangle 2.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2_-}(2x-1)=3$, $\lim\limits_{x\to 2_+}(2x+1)=5$, точка 2 – точка разрыва 1 рода, т.к. $3\ne 5$

Самостоятельная работа №7

Составление опорного конспекта по теме: Производная.

Методические указания:

5. Записать формулы к определению производной функции, физическому и геометрическому смыслу производной функции.
6. Выписать таблицу производных и правила дифференцирования.
7. Выучить формулы.

Самостоятельная работа № 8

Выполнение домашней контрольной работы по теме: «Производная сложной функции»

Методические указания:

1. Записать формулу производной сложной функции.
2. Производную сложной функции находим, используя следующую таблицу:

Теоретический материал:

Таблица производных сложных функций

1. $C'=0$
2. $x'=1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a\rangle 0, a \neq 1$
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}, u\rangle 0$,
7. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}, u\rangle 0, a\rangle 0, a \neq 1$
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
11. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
12. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
15. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Пример 2. Найти производную функции: а) $f(x) = (2x^2+1)^5$; б) $f(x) = tg^2 3x$;

в) $f(x) = \log^2(3x^4+4)$, г) $f(x) = 2\cos(3x-1)$.

Решение. а) $f'(x) = ((2x^2+1)^5)' = 5(2x^2+1)^4 \cdot 4x = 20x(2x^2+1)^4$.

б) $f'(x) = (tg^2 3x)' = 2tg3x \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x} = \dfrac{6tg3x}{\cos^2 3x}$.

в) $f'(x)=(\log_3^2(3x^4+4))'=2\log_3(3x^4+4)\cdot 12x^3=24x^3\log_3(3x^4+4)$.

г) $f'(x)=(2\cos(3x-1))'=-2\sin(3x-1)\cdot(3x-1)'=-2\cdot 3\sin(3x-1)=-6\sin(3x-1)$

Пример 3. . Найти производную функции: а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, б) $f(x)=\arccos^3(x^2-1)$,

в) $f(x)=(2^{3x}-\cos(2x+5)-2)^4$.

Решение: а) Преобразуем функцию $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}=u^{\frac{1}{2}}$, где $u=\dfrac{1+x}{1-x}$.

Найдем производную функции

$$u=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}==\frac{2}{(1-x)^2}$$

Найдем производную функции $\left(u^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Производная функции $y'=f'(u)\cdot u'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{2}{((1-x)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$.

б) Преобразуем функцию $f(x)=\arccos^3(x^2-1)=u^3$, где $u=\arccos(x^2-1)$

$f'(x)=(\arccos^3(x^2-1))'=(u^3)'=3u^2\cdot u'=3\arccos^2(x^2-1)\cdot(\arccos(x^2-1))'$.

Преобразуем функцию $\arccos(x^2-1)=\arccos u$, где $u=x^2-1$.

$$(\arccos(x^2-1)'=(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'=-\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}\cdot(x^2-1)'=-\frac{2x}{\sqrt{2x-x^4}}$$

$$f(x)'=3\arccos^2(x^2-1)\cdot\left(-\frac{2x}{\sqrt{2x-x^4}}\right)=-\frac{6x\arccos^2(x^2-1)}{\sqrt{2x-x^4}}$$

в) Преобразуем функцию $f(x)=(2^{3x}-\cos(2x+5)-2)^4=u^4$, где $u=2^{3x}-\cos(2x+5)-2$.

$f'(x)=(u^4)'=4u^3\cdot u'=4(2^{3x}-\cos(2x+5)-2)^3\cdot(2^{3x}-\cos(2x+5)-2)'=$

$=4(2^{3x}-\cos(2x+5)-2)^3\cdot(3\cdot 2^{3x}\ln 2+2\sin(2x+5))$

Самостоятельная работа № 9

Выполнение домашней работы по теме: « Исследование функции с помощью производной»

Методические указания

Исследуйте функцию по схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Вычислить координаты точек пересечения графика функции с осями координат.
3. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции с помощью производной.
4. Найти промежутки выпуклостей и точки перегиба.
5. Схематически построить график функции.

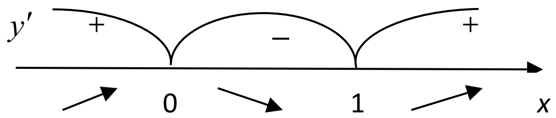
Пример. Исследовать функцию $y=2x^3-3x^2+5$ и схематически построить ее график.

1. Область определения функции D(f)=R.
2. Найдем координаты точки пересечения графика с осью Ох. Если $y=0$, то необходимо решить уравнение $2x^3-3x^2+5=0$.Решение данного уравнения третьей степени затруднительно, поэтому решать его не будем.

   Найдем координаты точки пересечения графика с осью Оу. Если $x=0,$ то $y = 5.$

Вывод: график пересекает ось ОУ в точке (0;-5)

3. Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции. Найдем производную функции $y'=6x^2-6x$. Решим уравнение $y'=0$, $6x^2-6x=0,\ 6x(x-1)=0,\ x=0,\ x=1$



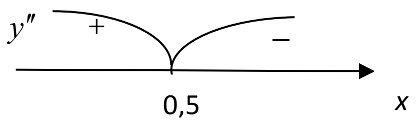
   $x_{max}=0,\ y_{max}=5, x_{min}=1,\ y_{min}=4.$

   Вывод: max(0; 5), min(1; 4)

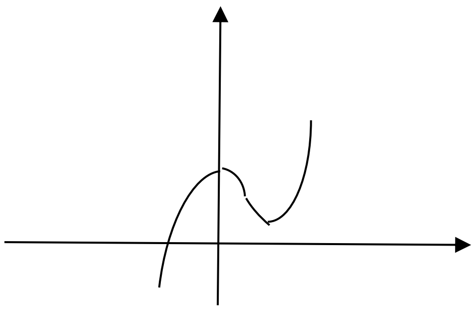
4. Найти промежутки выпуклостей и точки перегиба.

   Найдем вторую производную $y''=12x-6$, Решим уравнение $y''=0$,

   $12x-6=0,\ x=0{,}5.$



   Точка перегиба $x=0{,}5,\ y = 4{,}5.$



Самостоятельная работа № 10

Составление опорного конспекта по теме: Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

Методические указания.

1. Записать формулами: определение неопределенного интеграла и его свойства; таблицу интегралов; формулу Ньютона – Лейбница; геометрический и физический смысл определенного интеграла.

2. Выучить таблицу интегралов, определения, геометрический и физический смысл определенного интеграла.

Самостоятельная работа № 11

Выполнение домашней контрольной работы по теме: Приложение интеграла к решению прикладных задач.

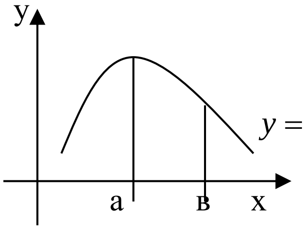
Методические указания:

1. Выучить теоретический материал.
2. Разобрать решения примеров.
3. Выполнить индивидуальное задание, оформив его в соответствии с требованиями.

Применение определенного интеграла:

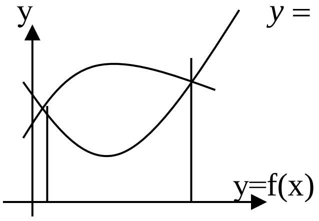
– Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ равен площади криволинейной трапеции.
– Определенный интеграл закона изменения скорости за промежуток времени равен пути, пройденному материальной точкой за этот промежуток времени.

1 случай



$y = f(x)$ $\qquad S = \int_a^в f(x)dx = F(в) - F(a)$ **Формула Ньютона-Лейбница**

2 случай



$y = g(x)$

Пределы интегрирования

$f(x) = g(x)$
$x = a;$
$x = в;$

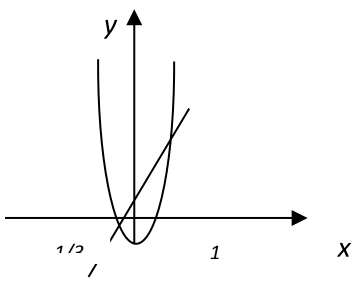
$$S = S_2 - S_1 = \int_a^в f(x)dx - \int_a^в g(x)dx$$

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями
$f(x) = 3x^2 - x - 2,\ y = x - 1$

Решение. Найдем пределы интегрирования

$3x^2 - x - 2 = x - 1$, $3x^2 - 2x - 1 = 0$,

$D=b^2-4ac$ = 1+24=25, x=1, x= - 1/3.

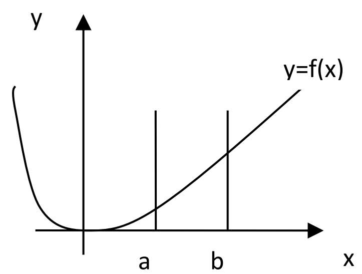


$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}((x-1)-(3x^2-x-2))dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(-3x^2+2x+1)dx=(-x^3+x^2+x)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1}=(-1+1+1)-(\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3})=$$

$$=1\frac{5}{9}$$

Ответ: $1\frac{5}{9}$ куб.ед.

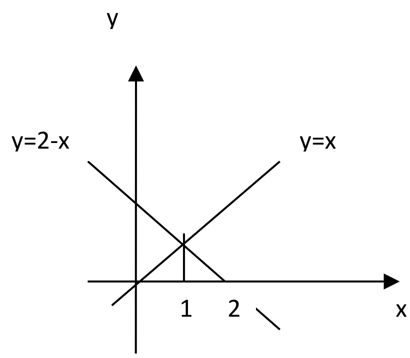
Объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями y=f(x), y=0, x=a, x=b



$$V=\pi\int_{a}^{в} f^2(x)dx$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси x плоской фигуры, ограниченной линиями y = 0; y = x; y = 2 - x
построим тело вращения

У = x				У = 2 - x		
x	0	1		x	0	2
y	0	1		y	2	0



Найдем пределы интегрирования

y=0 x=0 2-x=0 x=2-x
x=2 2x=2
x=1

$$V=V_1+V_2 \qquad V=\pi\int_{a}^{в} f^2(x)dx$$

$$V_1=\pi\int_{0}^{1} f^2(x)dx=\pi\int_{0}^{1}x^2dx=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}(куб.ед)$$

$$V_2=\pi\int_{1}^{2}(2-x)^2dx=-\pi\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_1^2=-\pi\cdot\frac{0}{2}+\frac{(2-1)^2\pi}{2}=\frac{1}{2}\pi(куб.ед)$$

$$V=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}(куб.ед)$$

Ответ: $V = \frac{5}{6}\pi \approx \frac{5\cdot 3}{2} \approx 2{,}5(куб.ед)$.

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ **при перемещении** по оси Ох материальной точки от х = а, до х = b находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется **закон Гука**: $F = kx$, где к – коэффициент пропорциональности (Н/м), F – сила (Н), х – абсолютное удлинение пружины (м), вызванное силой F.

Пример. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10Н.

Решение. Найдем коэффициент пропорциональности $k = \frac{F}{x} = 1000$ Н/м. Отсюда F= 1000x.

искомую работу найдем по формуле $\int_0^{0,04} 1000xdx = 0{,}8$ (Дж).

Самостоятельная работа № 12

Составление опорного конспекта по теме: Матрицы, операции над ними.

Методические указания:

1. Записать определение матрицы, элементов матрицы, сложения, вычитания, умножения матриц.
2. К каждому определению сделать символические записи.

Самостоятельная работа № 13

Выполнение домашней контрольной работы по теме: Выполнение действий над матрицами. Вычисление определителей.

Методические указания:

1. Изучите теоретический материал.
2. Решите задачи в соответствии с примерами, приведенными в теоретическом материале.

Теоретический материал:

Операции над матрицами.

1. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число α

называется матрица B= α A, элементы $b_{y} = \alpha\, a_{y},$ для любых I = 1, 2,…, m; j = 1, 2, …, n.

Например, если A=$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$то $\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т. е. 0*a=**0**

2. ***Сложение матриц.*** *Сумма двух матриц* A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C=A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij+b_{ij}}$ для i=1,2,…,n (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

В частном случае A+0=A.

3. ***Вычитание матриц.*** Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: A-B=Ф+(-1)*B.
4. ***Умножение матриц.*** *Умножение матрицы* A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй [1]. Тогда *произведением матриц* $\underset{m \times k}{A} \cdot \underset{k \times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m \times n}{C}$, каждый элемент которой C_{IJ} равен сумме произведений элементов i-го строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

$C_{ij} = a_{ij}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj=\sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj},i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n.}$

➢ **Пример** Вычислить произведение матриц $A \cdot B$,где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение 1. Найдем размер матрицы-произведения: $\underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 3}{B} = \underset{2 \times 3}{C}$.

2. Вычислить элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбов матрицы B следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Получаем $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа № 14

Выполнение домашней работы по теме: Вычисление определителей. Составление матрицы, обратной данной.

Методические указания:

1. Изучите теоретический материал.
2. Решите задачи в соответствии с примерами, приведенными в теоретическом материале.

Теоретический материал:

Определением матрицы первого порядка A=(a_{11}), или определителем первого порядка, называется элемент a_{11}:

$\Delta_1 = |A| = A_{11}$. Например, пусть A=(3), тогда $\Delta_1 = |A| = 3$.

Определителем матрицы второго порядка A=(A_{ij}),или определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$\Delta_2 |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определения* второго порядка.

Например $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда $\Delta_2|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определением матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$*, или определителем третьего порядка,* называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определения. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу, легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется *правилом треугольников* или *правилом Саррусa*

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$$

, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Начнем с матрицы «два на два».

<u>Пример 1:</u>

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решаем. Последовательность действий удобно разложить по пунктам.

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

2) Находим матрицу миноров M.

Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти его минор вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Оставшееся число и является минором данного элемента, которое записываем в нашу матрицу миноров:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Рассматриваем следующий элемент матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

То, что осталось, и есть минор данного элемента, который записываем в нашу матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 \\ \boxed{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Аналогично рассматриваем элементы второй строки и находим их миноры:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \boxed{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Готово.

$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений A_*.

В матрице миноров нужно ПОМЕНЯТЬ ЗНАКИ у двух чисел:

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$A_* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений A_*^T.

$A_*^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

5) Ответ.

Вспоминаем нашу формулу $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A_*^T$

Всё найдено!

Таким образом, обратная матрица:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

6)Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-3) & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) & 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Пример 2:

Найти обратную матрицу для матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Алгоритм точно такой же, как и для случая «два на два».

Обратную матрицу найдем по формуле: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_{*}^{T}$, где B_{*}^{T} – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

1) Находим определитель матрицы.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-9+8) - 5 \cdot (-18-20) + 7 \cdot (-12-15) = -2 + 190 - 189 = -1$$

Здесь определитель раскрыт по первой строке.

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет размерность «три на три» $M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$, и нам нужно найти девять чисел.

3. Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$B = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и является минором данного элемента. Его нужно вычислить:

$$B = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -9 + 8 = -1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{7} \\ \cancel{6} & 3 & 4 \\ \cancel{5} & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -9 + 8 = -1$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

необходимо вычислить девять определителей «два на два».
Ну и для закрепления – нахождение еще одного минора в картинках:

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 5 & \boxed{7} \\ \boxed{6} & 3 & \boxed{4} \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 6 \cdot 7 = 8 - 42 = -34$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Остальные миноры попробуйте вычислить самостоятельно.

5. Окончательный результат:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.
В матрице миноров необходимо СМЕНИТЬ ЗНАКИ строго у следующих элементов:

$$M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

В данном случае:

$$B_* = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений B_*^T.

$$B_*^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-38) + 7 \cdot 27 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 41 + 7 \cdot (-29) & 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-34) + 7 \cdot 24 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-38) + 4 \cdot 27 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 41 + 4 \cdot (-29) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-34) + 4 \cdot 24 \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-38) - 3 \cdot 27 & 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 41 - 3 \cdot (-29) & 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-34) - 3 \cdot 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Самостоятельная работа № 15

Составление опорного конспекта по теме: Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x+y-z=-3 \\ x-5y-z=-8 \end{cases}$$

Решение:

Решим с помощью обратной матрицы

Запишем систему уравнений в матричном виде AX = B, где

Матрица коэффициентов $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

1 способ. Решим с помощью обратной матрицы

Определитель матрицы А

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=(-1-5)+2(-2+1)+(-10-1)=-6-2-11=-19$$

Транспонируем матрицу А

$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдем алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1-5=-6$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-(-2+1)=1$, $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=-10-1=-11$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-(2+5)=-7$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-(-1-2)=3$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2-1=1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-(-1-2)=3$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+4=5$

Составим матрицу из алгебраических дополнений $\overline{A} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Составим матрицу, обратную матрице А по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\overline{A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-19}\begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы уравнений по формуле $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{-19}\begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\cdot(-1) - 7\cdot(-3) + 1\cdot(-8) \\ 1\cdot(-1) - 2\cdot(-3) + 3\cdot(-8) \\ -11\cdot(-1) + 3\cdot(-3) + 5\cdot(-8) \end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 19 \\ -19 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка: $\begin{cases} -1 - 2\cdot 1 + 2 = -1 \\ 2\cdot(-1) + 1 - 2 = -3 \\ -1 - 5\cdot 1 - 2 = -8 \end{cases}$, верно.

Ответ: (- 1; 1; 2)

Самостоятельная работа № 16

Выполнение домашней контрольной работы по теме: Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, методом Крамера и матричным методом

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - z = -3 \\ x - 5y - z = -8 \end{cases}$$

Решение:

1.Решим методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу из коэффициентов и свободных членов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -1 & -8 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -19 & -38 \end{array}\right)$$

1. Умножим 1 строку на (-2) с сложим поэлементно со 2 строкой, результат запишем во 2 строку.

Умножим 1 строку на (-1) и сложим поэлементно с 3 строкой, результат запишем в 3 строку.

2. Умножим 2 строку на 3, а 3строку на 5, сложим и запишем в 3 строку.
Составим систему уравнений, используя полученную матрицу треугольного вида

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 5y-3z=-1, \\ -19z=-38 \end{cases} \begin{cases} x-2y+2=-1 \\ 5y-3\cdot 2=-1, \\ z=2 \end{cases} \begin{cases} x-2\cdot 1+2=-1 \\ y=1\ , \\ z=2 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}.$$

Проверка выполняется, как и в 1 способе.

Ответ: (- 1; 1; 2)

2. Решим с помощью формул Крамера.

Определитель матрицы А

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=(-1-5)+2(-2+1)+(-10-1)=-6-2-11=-19$$

Заменим 1 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -1 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}=-(-1-5)+2(3-8)+(15+8)=$$
$$=6-10+23=19$$

Заменим 2 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -8 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}=(3-8)+(-2+1)+(-16+3)=-5-1-13=-19$$

Заменим 3 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -8 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=(-8-15)+2(-16+3)-(-10-1)=-23-26+11=-38$$

Найдем неизвестные по формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x=\frac{19}{-19}=-1,\quad y=\frac{-19}{-19}=1,\quad z=\frac{-38}{-19}=2$$

Проверка выполняется, как и в 1 способе.

Ответ: (- 1; 1; 2)

Самостоятельная работа № 17

Составление опорного конспекта по теме: Основы теории комплексных чисел.

Методические указания:

1. Записать: определение комплексного числа, мнимой единицы, мнимой, действительной частей, сопряженного, противоположного чисел.
2. Все определения записать на математическом языке.
3. Выучить определения.

Самостоятельная работа № 18

Выполнение домашней контрольной работы по теме : Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической форме.

Множество действительных чисел и мнимая единица составляют множество комплексных чисел. Число $Z = a + bi$ - комплексное число (алгебраическая форма записи)

a - действительная часть числа

bi – мнимая часть числа.

$a + b i = a_1 + b_1 i$, если $a = a_1$, $b = b_1$

$a + b i$ и $a - b i$ называются сопряженными

Числа $a + b i$ и $- a - b i$ называются противоположными

Сложение

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

Вычитание

$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$

Умножение

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot a_2 i + a_1 \cdot b_2 i + b_1 \cdot b_2 i^2 =$

$= a_1 \cdot a_2 + i (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) - b_1 \cdot b_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) i$

Деление

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Если $z_1 = \mathrm{r}_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = \mathrm{r}_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то:

$$\boldsymbol{z_1 z_2} = \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z_1^{\mathrm{n}} = \mathrm{r}_1^{\mathrm{n}}(\cos\mathrm{n}\varphi_1 + i\sin\mathrm{n}\varphi_1)$$

$$\sqrt[\mathrm{n}]{\boldsymbol{z_1}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{r}_1}\left(\cos\frac{\varphi_1 + 2\pi\mathrm{k}}{\mathrm{n}} + i\sin\frac{\varphi_1 + 2\pi\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)$$

Показательная форма комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$имеет вид $z = re^{\varphi i}$

<u>Пример 1</u> Выполнить сложение комплексных чисел z_1=4+2i b z_2=1+5i

По правилу сложения комплексных чисел имеем

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

подставим значения и получим:

$z_1 + z_2 = (4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5) i=5+7i$

<u>Пример 2</u> Выполнить вычитание комплексных чисел z_1=3+5i b z_2=6+3i

По правилу вычитания комплексных чисел имеем

$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$

подставим значения и получим:

$z_1 - z_2 = (3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3) i=-3+2i$

<u>Пример 3</u> Выполнить произведение комплексных чисел z_1=2-3i b z_2=3+2i

По правилу произведения комплексных чисел имеем

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) i$

подставим значения и получим:

$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)(3+2i)=(2\cdot 3 - (-3)\cdot 2)+(-3\cdot 3 +2\cdot 2) i= 12-5i$

<u>Пример 4</u> Выполнить деление комплексных чисел z_1=2-3i и z_2=4+5i

По правилу деления комплексных чисел имеем

$\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{4^2-5^2} = \frac{-7-22i}{-9} = \frac{7}{9}+\frac{22i}{9}$

Самостоятельная работа № 19

Составление опорного конспекта по теме: Множества. Операции над множествами

Методические указания:

1 Записать определение множества, объединение, пересечение, вычитание, декартово произведение множеств.
2 С помощью кругов Эйлера показать пересечение, объединение множеств, принадлежность одного множества другому.
3 К каждому чертежу сделать символические записи.

Самостоятельная работа № 20

Выполнение домашней работы по теме: Операции над множествами

Методические указания:

6. Изучите теоретический материал.
7. Решите задачи в соответствии с примерами, приведенными в теоретическом материале.

Множество – это совокупность некоторых объектов в одно целое по какому – то общему признаку.

Множество состоит из этих элементов. Объекты называются элементами множества. Множества обозначают заглавными буквами А, В, С. Принадлежность элемента множеству обозначается $x \in A$, читается х – элемент множества А. Запись $x \notin A$ означает, что х не является элементом множества А.

Пересечением множеств А и В называется множество С, состоящее из тех и только тех элементов, которые одновременно входят и в А и в В.

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

Пример. $A = \{1,2,3,4,5,\}$; $B = \{1,3,7,9\}$. Тогда $A \bigcap B = \{1,3\}$.

Пример. А – *множество чисел, кратных числу 3, В – множество чисел, кратных числу 5, тогда* $A \cap B$ *- множество чисел, которые кратны и 3 и 5, т.е. делятся на 15.*

Объединением множеств А и В называется множество С, состоящее из тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств.

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A или x \in B\}$$

Если в множества А и В есть одинаковые элементы, то в $A \bigcup B$ они входят только один раз.

Пример. Если $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,7,9\}$, тогда $A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$.

Пример. Пусть множество А – числа, кратные 3, а множество В – числа, кратные 5, тогда $A \bigcup B$ - числа, которые делятся или на 3, или на 5.

Пусть n - количество элементов множества А, а m – количество элементов множества В, тогда, если $A \bigcap B = O$, то количество элементов множества $A \bigcup B$ равно n+m.

Если же $A \bigcap B \neq O$ и оно содержит х элементов, то количество элементов множества $A \bigcup B$ равно n+m – x.

Вычитанием множества В из множества А (А/В) это множество, состоящее из элементов множества А не входящих в множество В.

Пример. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$, $C = \{1,2,11,12\}$. Найти А \ В, В \ А

Решение. $A \setminus B = \{1,3,5,7\}$, $B \setminus A = \{8,10\}$.

Декартовым произведением множеств А и В называется множество всех пар , первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая принадлежит множеству В. $A \times B = \{x, y \mid x \in A, y \in B\}$

Пример. Найти декартово произведение множеств А и В, где $A = \{m, p\}, B = \{e, f, n\}$.

Решение. $A \times B = \{(m,e),(m,f),(m,n),(p,e),(p,f),(p,n)\}$.

Пример. Пусть множество А делители числа 40. Перечислите элементы этого множества.
Решение. $A = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}$.

Пример. Найти объединение и пересечение множеств А и В, где
$A = \{a,b,c,d,e,f\}, B = \{b,e,f,k\}$.
Решение $A \bigcup B = \{a,b,c,d,e,f,k\}, A \bigcap B = \{b,e,f\}$

Пример. Из 32 школьников 12 занимаются волейболом, 15 – баскетболом, 8 – в той и другой секции. Сколько человек ни чем не занимаются?
Решение. А – множество учащихся, занимающихся волейболом, в этом множестве 12 элементов, В - множество учащихся, занимающихся баскетболом, в нем 15 элементов. Тогда $A \bigcap B$ - пересечение означает учащихся, занимающихся и тем и другим, в нем 8 элементов. Тогда учащихся, занимающихся только волейболом 12 – 8 = 4, а учащихся занимающихся только баскетболом 15 – 8 = 7. Число учащихся, не занимающихся ни в одной секции 32 – 7 – 4 – 8 = 13.

Пример. Дети коллекционируют марки и монеты. Марки коллекционируют 8 человек, а монеты – 7 человек. Всего детей 12 человек. Как это может быть?
Решение. Так может случиться, если кто – то коллекционирует и то и другое. Пусть множество А коллекционеры марок, а множество В коллекционеры монет, тогда $A \bigcap B$ коллекционируют и марки и монеты. $A \bigcup B$ коллекционируют или марки или монеты. 8 + 7 – 12 = 3. Только марки коллекционируют 5 человек, а только монеты 4 человека.

Самостоятельная работа № 21

Составление опорного конспекта по теме: Элементы теории вероятностей

Методические указания.

1. Выпишите определение понятия: событие, благоприятствующее появлению события А, равновозможные события, совместных и несовместных событий, равных и противоположных событий, сложения и умножения событий; вероятность события: формулы из раздела :Комбинаторика.
2. Выучить теоретический материал.

Самостоятельная работа № 22

Выполнение домашней контрольной работы по теме :Решение задач с применением элементов комбинаторики на вычисление вероятностей событий».

Методические указания:

1. Изучите теоретический материал.

2. Решите задачи, оформив их решение в соответствии с примерами, указанными в теоретическом материале.

Вероятностью события А называют отношение числа m (числа исходов, благоприятствующих появлению события А), к числу n (числу всех равновозможных исходов данного опыта). $\mathbf{P} = \frac{m}{n}$.

Пример: Найти вероятность того, что случайным образом из колоды карт вынут карту дама.

Решение. В колоде 4 дамы, значит число событий, благоприятствующих появлению дамы m = 4. Всего в колоде 36 карт, следовательно, число равновозможных событий n = 36.

$$P = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Пример: В коробке лежат 4 черных, 7 белых и 5 красных шаров. Из коробки случайным образом берут шары. Найти вероятность того, что возьмут:

1) 1 шар белого цвета,
2) 2 шара черного цвета,
3) 3 красных и 4 белых,
4) 5 шаров, среди которых могут оказаться шары красного или белого цвета.

Решение.

1) Событие А взять 1 шар белого цвета.

В коробке 7 белых шаров, значит m = 7 (число благоприятствующих событий для события А), Всего шаров 16, значит n = 16 (число равновозможных событий).

Вычислим по формуле вероятности $\mathbf{P} = \frac{m}{n} = \frac{7}{16}$.

2)Событие В – взяли 2 шара черного цвета.

В коробке 4 черных шара, а взять надо из них 2, значит $m = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 12$ (число благоприятствующих событий для события В), Всего шаров 16, а взять надо из них 2, значит $n = \mathbf{A}_{16}^2 = \frac{16!}{(16-2)!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14!}{14!} = 240$ (число равновозможных событий).

Вычислим по формуле вероятности $\mathbf{P} = \frac{m}{n} = \frac{12}{240} = \frac{1}{20}$.

3) Событие С – взять 3 красных и 4 белых шаров.

Вычислим число событий, благоприятствующих событию С:

$$m = A_5^3 \cdot A_7^4 = \frac{5!}{(5-3)!}\cdot\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 60\cdot 840 = 50400$$

Вычислим число равновозможных событий:

$$n = A_{16}^7 = \frac{16!}{(16-7)!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!} = 57657660$$

Вычислим по формуле вероятности $\mathbf{P} = \frac{m}{n} = \frac{50400}{57657660} = \frac{2520}{2882883} = \frac{840}{960961}$.

4) Событие D - взять 5 шаров, среди которых могут оказаться шары красного или белого цвета.

В коробке 12 шаров нужной окраски, необходимо взять из них 5.

m = $A_{12}^{5} = \dfrac{12!}{(12-5)!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} = 95040$

n = $A_{16}^{5} = \dfrac{16!}{(16-5)!} = \dfrac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11!}{11!} = 524160$

Вычислим по формуле вероятность **P(D) =** $\dfrac{m}{n} = \dfrac{95040}{524160} = \dfrac{297}{1638} = \dfrac{33}{182}$ **.**

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$\boxed{\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)}}.$$

Пример. Найти вероятность того, что из колоды карт случайным образом достанут даму или короля.

Решение. Пусть событие А – «достали даму», В – «достали короля». Так как события А и В несовместны, то Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

Но Р(А) = 4/36 = 1/9, Р(В) = 4/36 = 1/9, значит Р(А+В) = 1/9 + 1/9 = 2/9.

Теорема 2. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$\boxed{P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)}$$

Теорема 3. Если события А и В совместны, то вероятность их суммы выражается формулой

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)},$$

т.е. вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения (совместного осуществления).

Пример. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение. Пусть событие А – «выпадение 6 очков при бросании первой игральной кости»; В – «выпадение 6 очков при бросании второй игральной кости». Так как события А и В совместны, то

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Но Р(А)=1/6, Р(В)=1/6, Р(АВ)=1/36, поэтому Р(А+В)=1/6+1/6 - 1/36 = 11/36.

Определение. ***Условной вероятностью*** события В при условии А называется отношение $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ вероятности произведения событий А и В к вероятности события А при Р(А) $\neq 0$

Таким образом, по определению $\boxed{P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}}$.

Аналогично определяется и условная вероятность события А при условии В:

$P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, при Р (В) $\neq 0$.

Пример. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из урны последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что второй шар окажется черным, при условии, что первый был белый.

Решение. Пусть А – «первый шар черный», В – «второй шар черный». Если произошло событие А, то в урне осталось 6 шаров, из которых 2 черных.
$P(A) = 3/7$. Для нахождения Р (АВ) вычислим n – общее число исходов (совместного появления двух шаров безразлично какого цвета) по формуле $n = A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$. Из этого числа событию АВ благоприятствуют m = $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Поэтому Р(АВ) = 6/42=1/7. по формуле условной вероятности получаем $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{1}{7} \div \dfrac{3}{7} = \dfrac{1}{3}$.

Теорема. Вероятность произведения двух произвольных событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Пример. В мастерских изготавливаются детали на двух станках. Вероятность изготовления детали на первом станке равна 0,6. Вероятность появления годной детали на первом станке равна 0,8. Найти вероятность того, что годная деталь изготовлена на первом станке.
Решение. Пусть событие А – «деталь изготовлена на первом станке», В – « деталь годная». Имеем: Р(А)=0,6, Р(В/А)=0,8. Находим из формулы $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$,
$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.
Пример. В ящике находится 7 деталей первого сорта, 5 – второго сорта и 3 – третьего сорта. Из ящика последовательно вынимают 3 детали. Найти вероятность того, что первая наугад вынутая деталь окажется первого сорта (событие А), вторая деталь – второго сорта (событие В), третья деталь третьего сорта (событие С).
Решение. Очевидно, что Р(А) = 7/15, Р(В/А) = 5/14, Р(С/АВ)=3/13.Находим
$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = \dfrac{7}{15} \cdot \dfrac{5}{14} \cdot \dfrac{3}{13} = \dfrac{1}{26}$.
Теорема. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
Определение. Событие В называется **независимым** от события А, если условная вероятность события В при условии А равна вероятности события В, т.е.
если Р(В/А) = Р(В), при Р(А) $\neq$ 0.
Если же Р(В/А) $\neq$ Р(В), то событие В называется **зависимым** от события А.
Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия (событие А) равна Р(А)=0,8, из второго орудия (событие В) равна Р(В)=0,7. Найти вероятность хотя бы однократного попадания в цель (событие А+В) при одновременной стрельбе из обоих орудий.
Решение. Так как вероятность попадания в цель при стрельбе из каждого орудия не зависит от результата стрельбы из другого орудия, то события А и В независимы. Тогда
$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.
Поэтому искомая вероятность, с учетом совместности событий А и В,
$P + (A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94$.

Формула полной вероятности

Пусть событие А может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, ...H_n$, образующих полную систему попарно несовместных событий. Тогда, вероятность события А вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot H(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + ...P(H_n) \cdot P(A | H_n)$$

Пример. В мастерских на станках a,b,c изготовляют соответственно 25%, 35%, 40% всех деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15%, 12%, 6%. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь дефектна**.**

Решение. Пусть события А – «деталь дефектна»,

H_1 – «деталь изготовлена на станке a», H_2 – «деталь изготовлена на станке b»,

H_3 – «деталь изготовлена на станке c».

События H_1, H_2, H_3 образуют полную систему попарно несовместных событий и

$P(H_1) = 0{,}25$, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(H_3) = 0{,}4$. Кроме того числа 0,15; 0,12; 0,06 являются условными вероятностями события А, при условии событий H_1, H_2, H_3 соответственно, т.е. $P(A / H_1) = 0{,}15$, $P(A / H_2) = 0{,}12$; $P(A / H_3) = 0{,}06$.

Находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot H(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3) = 0{,}25 \cdot 0{,}15 +$$
$$+ 0{,}35 \cdot 0{,}12 + 0{,}4 \cdot 0{,}06 = 0{,}1035$$

Самостоятельная работа № 23

Составление опорного конспекта по теме: «Элементы математической статистики»

Методические указания.

1.Выпишите определение понятия: случайной величины, закон распределения случайной величины, математического ожидания ДСВ, дисперсии ДСВ,

2.Выучить теоретический материал.

Самостоятельная работа № 24

Выполнение домашней контрольной работы по теме: «Построение гистограмм и полигонов частот с использованием статистических данных выборки»

Методические указания:

1. Изучите теоретический материал.
2. Решите задачи, оформив их решение в соответствии с примерами, указанными в теоретическом материале.

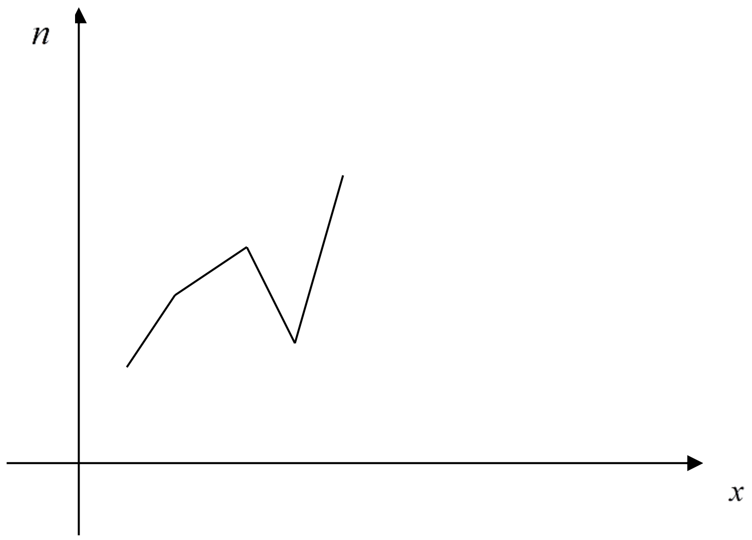
Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

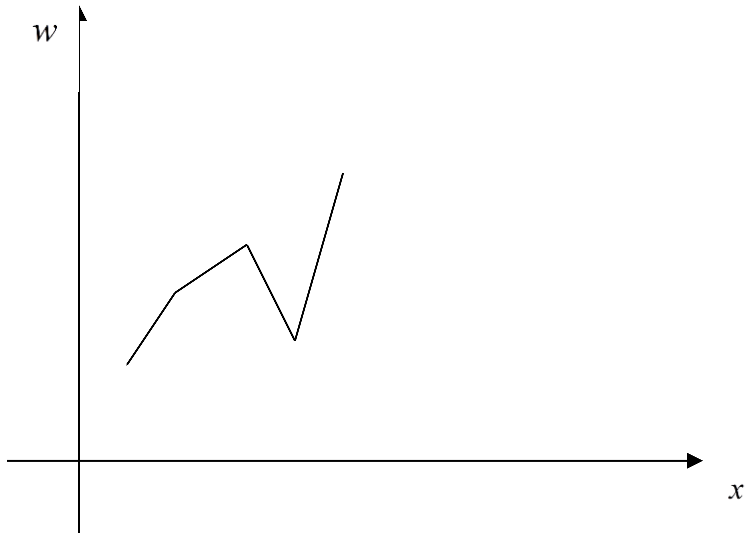
В первой строке указывают значения вариант, а во второй – значения частот или относительных частот. Можно свести эти данные в одну таблицу с тремя строками.

Если на оси абсцисс прямоугольной системы координат расположить варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i, то в плоскости получим точки с координатами ($x_i ; n_i$). Соединим точки ($x_i ; n_i$) отрезками прямых.

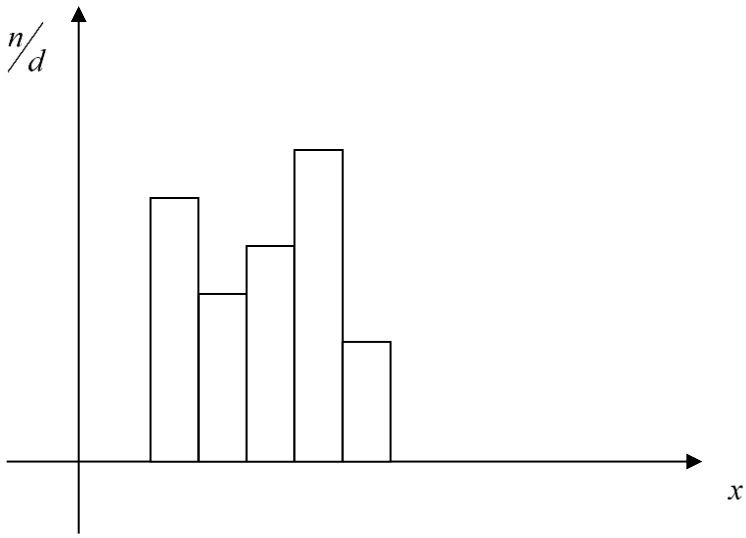
Ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами ($x_i ; n_i$), называется **полигоном частот**.



Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки ($x_i ; w_i$), построенные в системе координат так, что на оси абсцисс расположены варианты, а на оси ординат – относительные частоты.



Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, построенных на частичных интервалах с длиной d и высотой равной отношению n_i / d (плотность частоты на данном интервале).



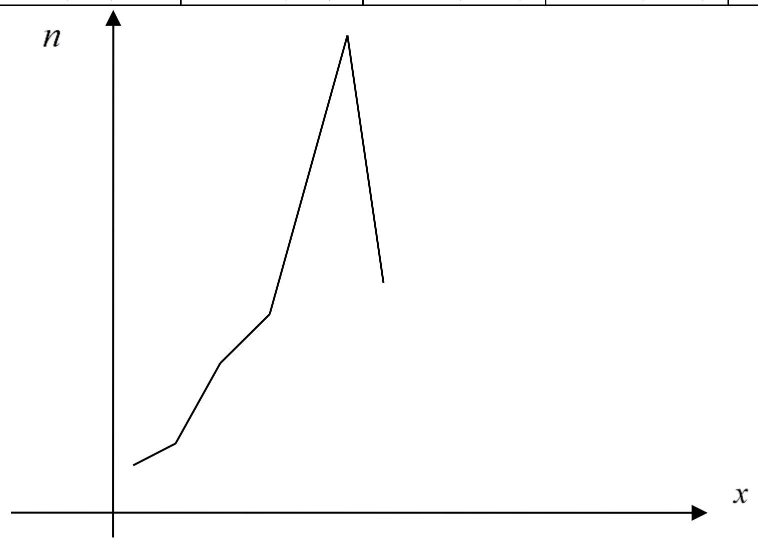
Если статистическое распределение выборки задается в виде последовательности интервалов значений вариант и их частот, то геометрическое изображение дается при помощи гистограммы частот.

Гистограммы относительных частот строятся аналогично, только в качестве высот прямоугольников берется отношение w_i / d.

Гистограмма относительных частот может быть получена из гистограммы частот сжатием вдоль оси ординат в n раз.

Пример. Построить полигон частот, если статистическое распределение имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	4	6	12	16	44	18
Построим ломаную линию с помощью точек с координатами						
	(1;4)	(2;6)	(3;12)	(4;16)	(5;44)	(6;18)



Самостоятельная работа № 25

Подготовка к зкзамену.

Подготовить ответы на теоретические вопросы, решить практические задания.

Теоретические вопросы

1. Функция одной переменной.

2. Предел функции.

3. Первый замечательный предел функции. Второй замечательный предел функции.

5. Непрерывная функция.

6. Производная функции. Таблица производных.

7. Производная суммы, произведения, частного.

8. Геометрический смысл производной.

9. Физический смысл производной.

10 .Сложная функция. Производная сложной функции.

12. Вторая производная.

13. Геометрический смысл второй производной.

14. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.

16. Таблица интегралов.

17. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

19. Геометрический смысл определенного интеграла.

20. Матрицы. Определитель матрицы.

24. Операции над матрицами.

25. Обратная матрица.

26. Комплексные числа.

27. События и их виды. Вероятность события.

28. Перестановки. Сочетания. Размещения.

Практические задания

1. Вычисление пределов функции.
2. Исследование функции на непрерывность с помощью предела функции.
3. Исследование функции с помощью производной.
4. Нахождение неопределенных интегралов методами непосредственного интегрирования, замены переменной.
5. Выполнение операций над матрицами.
6. Нахождение числовых характеристик случайной величины.
7. Нахождение вероятности событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей.
8. Нахождение числовых характеристик выборки.

Основные источники:

1. Богомолов, Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко.-5-е изд., перераб. и доп.- Москва: Юрайт, 2016.-396 с.
2. Дадаян, А. А. Математика [Электронный ресурс]: учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с. - Режим доступа http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=397662 (ЭБС Znanium)
3. Канцедал, С. А. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.А. Канцедал. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 224 .-Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=376152 (ЭБС Znanium)

Дополнительные источники:

1. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике. В2 ч. [Текст]: учебное пособие для СПО / Н.В. Богомолов.- 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2016
2. Математика в примерах и задачах. Ч. 1 [Электронный ресурс] : В 2 ч.: учеб. пособие / Л.И. Майсеня [и др.]; под общ. ред. Л.И. Майсени. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 356 с.: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=509699 (ЭБС Znanium)
3. Математика в примерах и задачах. Ч. 2 [Электронный ресурс] : В 2 ч.: учеб. пособие / Л. И. Майсеня [и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсени. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=509703 (ЭБС Znanium)

Интернет источники:

1. http://www.rusedu.ru/subcat_is/htm/
2. http://www.alleng.ru/edu/math3.htm
3. http://www.softtok.org/science/math/