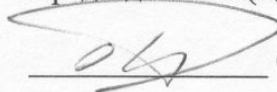


НЕФТЕЮГАНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
(филиал) Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Югорский Государственный Университет»

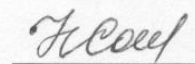
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению самостоятельной работы
по дисциплине МАТЕМАТИКА
для специальности 08.02.09

Нефтеюганск
2016

ОДОБРЕНА
Предметной (цикловой)
комиссией
Протокол № 1 от 15.09.16
Председатель П(Ц)К

 О.В. Гарбар

Утверждена
заседанием методсовета
Протокол № 1 от 22.09.16
Председатель методсовета

 Н.И. Савватеева

Разработал О.В. Бурдина – преподаватель НИК (филиал) ФГБОУ ВО «ЮГУ»

Содержание

	стр
Пояснительная записка	4
1.Карта самостоятельной работы студента.....	5
2.Порядок выполнения самостоятельной работы студентом...	7
2.1 Методические рекомендации по выполнению различных видов самостоятельной работы.....	8
2.2 Методические рекомендации по выполнению самостоятельной учебной работы.....	9
Список рекомендуемой литературы.....	32

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению самостоятельной работы по дисциплине МАТЕМАТИКА для специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и техническая эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий. (далее – методические указания) составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины Математика для специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и техническая эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий.

Содержание методических указаний соответствует требованиям Федерального государственного стандарта среднего профессионального образования специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и техническая эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий.

Целью методических указаний является обеспечение эффективности самостоятельной работы обучающихся на основе организации их выполнения.

Задачами методических указаний по организации самостоятельной работы являются:

- активизация самостоятельной работы студентов;
- управление познавательной деятельностью студентов;
- содействие развития творческого отношения к данной дисциплине;
- выработка умений и навыков рациональной работы;
- повышение качества подготовки к занятиям.

Методические указания состоят из карты самостоятельной работы студента, порядка выполнения самостоятельной работы студентом и списка рекомендуемой литературы.

В карте самостоятельной работы указаны наименования самостоятельных работ и тем, к которым они относятся, виды заданий и формы контроля для самостоятельного выполнения, указано время, планируемое для выполнения каждой самостоятельной работы.

В разделе «Порядок выполнения самостоятельной работы студентом» даются методические рекомендации и порядок выполнения каждой самостоятельной работы, дается достаточный объем теоретического материала, приведены примеры решения типичных заданий, рекомендована литература.

Для выполнения самостоятельной работы необходимо пользоваться конспектами занятий, рекомендованной учебной литературой, Интернет-ресурсами или другими источниками по усмотрению студента.

При изучении дисциплины предусматриваются следующие формы самостоятельной работы студента:

- составление опорных конспектов;
- выполнение домашней контрольной работы.

Задания для домашней контрольной выдаются преподавателем.

Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем в аудитории.

Предусмотрен вид контроля:

- проверка письменной работы.

Результаты контроля используются для оценки текущей успеваемости студентов.

Оценка текущей успеваемости студентов выставляется преподавателем в учебный журнал.

В дальнейшем пособие может перерабатываться при изменении рабочей программы, Федеральных государственных стандартов.

1. КАРТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

№ работ ы	Наименование темы	Наименование самостоятельной работы	Вид работы	Часы	
1	<i>Погрешности приближенных значений чисел.</i>	Выполнение домашней контрольной работы №1 по теме «Абсолютная и относительная погрешности приближенного значения числа»	Письменная работа	2	ОК 4
2		Выполнение домашней контрольной работы №2 по теме «Вычисление с наперед заданной точностью»	Письменная работа	2	ОК 4
3	<i>Предел функции.</i>	Выполнение домашней контрольной работы №3 по теме «Предел функции»	Письменная работа	2	ПК2.4
4	<i>Дифференциальное исчисление</i>	Выполнение домашней контрольной работы № 4 по теме «Решение прикладных задач с помощью производной»	Письменная работа	2	ОК 2
5	<i>Интегральное исчисление</i>	Выполнение домашней контрольной работы №5 по теме «Нахождение неопределенных интегралов различными методами»	Письменная работа	3	ПК4.2
6		Выполнение домашней контрольной работы №6 по теме «Применение определенного интеграла».	Письменная работа	3	ПК4.2
7	<i>Ряды</i>	Выполнение домашней контрольной работы №7 по теме: Числовые ряды	Письменная работа	2	ПК2.4
8	<i>Численные методы</i>	Выполнение домашней контрольной работы №8 по теме: Вычисление определенных интегралов методом трапеций, прямоугольников.	Письменная работа	2	ПК4.2
9		Выполнение домашней контрольной работы №9 по теме: Применение метода Эйлера при решении дифференциальных уравнений.	Письменная работа	2	ПК4.2
10	<i>Дифференциальные уравнения</i>	Выполнение домашней контрольной работы №10 по теме: Дифференциальные уравнения первого порядка.	Письменная работа	3	ПК4.3
11		Выполнение домашней контрольной работы №11 по теме: Дифференциальные уравнения второго порядка.	Письменная работа	3	ПК4.3
12	<i>Теория комплексных чисел</i>	Сообщения по теме «История возникновения теории комплексных чисел»	Письменная работа	3	ОК 3

13		Выполнение домашней контрольной работы №12 по теме «Комплексные числа»	Письменная работа	3	ПКЗ.3
14	<i>Системы линейных уравнений</i>	Выполнение домашней контрольной работы №13 по теме «Системы линейных уравнений»	Письменная работа	4	ОК 8
15		Выполнение домашней контрольной работы №14 по теме «Уравнения. Системы уравнений»	Письменная работа	4	ОК 8
	<i>Итого</i>			40	

2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОМ

2.1 Методические рекомендации по выполнению различных видов самостоятельной работы.

2.1.1. Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы.

Контрольная работа — промежуточный метод проверки знаний обучающегося с целью определения конечного результата освоения данной темы или раздела.

Домашняя контрольная работа проводится по конкретной теме. Она призвана систематизировать знания, позволяет повторить и закрепить материал. При ее выполнении обучающиеся могут использовать любые учебные пособия, консультации преподавателя.

Повторите теоретический материал по контролируемой теме. Выполните задания в соответствии с требованиями к оформлению работ.

Общие требования к оформлению работ:

- 1) домашние контрольные работы выполняются в отдельной тетради; должен быть указан вариант, тема контрольной работы;
- 2) работа должна быть выполнена аккуратно;
- 3) все преобразования должны быть выполнены последовательно;
- 4) при выполнении чертежей должны быть указаны названия осей координат, единичные отрезки;
- 5) при решении задач сначала запишите формулу, потом вычисления.

Методические указания:

1. Изучить теоретический материал.
2. Разобрать примеры решения.
3. Выполнить индивидуальные задания в тетради для практических работ с подробными объяснениями

Критерии оценки:

4. оценка «5», если выполнены все задания, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению, допускается 1 ошибка;
5. оценка «4», если выполнены все задания, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению, допускается не более 4 ошибок;
6. оценка «3», если выполнено более половины заданий, решение оформлено в соответствии с требованиями к оформлению;
7. оценка «2», если выполнено менее половины заданий.

2.1.2. Методические рекомендации по подготовке сообщения.

Методические указания

1. Найти информацию в сети интернет.
2. Подготовить сообщение в письменном виде.
3. Составить выступление на 3-4 минуты.
4. Выучить выступление для устного ответа.

Критерии оценки:

оценка «5», если студент рассказывает, а не читает выступление, рассказ аргументированный, четкий;

оценка «4», если студент рассказывает, заглядывая в текст выступления;

оценка «3», если студент читает выступление;

оценка «2», если студент не подготовил сообщение.

2.1.3. Методические рекомендации по подготовке к экзамену.

Подготовить ответы на теоретические вопросы, решить практические задания.

2.2 Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы.

Самостоятельная работа №1

Выполнение домашней работы №1 по теме «Абсолютная и относительная погрешности приближенного значения числа»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал.

Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением, a называется его *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа x и обозначается через α , т.е. $|x - a| = \alpha$.

Число a называется *приближенным значением* точного числа x с точностью до Δa , если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa , т.е. $|x - a| \leq \Delta a$. Число Δa называется *границей абсолютной погрешности* приближенного числа a .

Относительной погрешностью δ приближенного значения, a числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a , т.е. $\delta = \alpha/a$.

Действия над приближенными значениями чисел.

Сложение приближенных значений чисел.

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b,$$

где a и b – приближенные значения чисел;

Δa и Δb границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Вычитание приближенных значений чисел

Граница абсолютной погрешности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b$$

Умножение (деление) приближенных значений чисел

Чтобы найти произведение (частное) приближенных значений чисел нужно найти относительную погрешность произведения (частного), а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Функция	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности
$Y=ab$	$\Delta y = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

$Y=abc$	$\Delta y = bc \cdot \Delta a + ac \cdot \Delta b + ab \cdot \Delta c$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$
$Y=a^n$	$\Delta y = na^{n-1} \cdot \Delta a$	$\varepsilon_y = n \frac{\Delta a}{a}$
$Y=a^2$	$\Delta y = 2a\Delta a$	$\varepsilon_y = 2 \frac{\Delta a}{a}$
$Y=a^3$	$\Delta y = 3a^2\Delta a$	$\varepsilon_y = 3 \frac{\Delta a}{a}$
$Y=\sqrt{a}$	$\Delta y = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{2a}$
$Y=\sqrt[3]{a}$	$\Delta y = \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{3a}$
$Y=\frac{a}{b}$	$\Delta y = \frac{ b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

Пример 1: Найти сумму S приближенных значений чисел $6,8 \pm 0,05$; $4,3 \pm 0,05$ и $3,575 \pm 0,0005$.

Решение: $S = 6,8 + 4,3 + 3,575 = 14,675$; $\Delta S = 0,05 + 0,05 + 0,0005 = 0,1005$.

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах $0,05 < 0,1005 < 0,5$. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в разрядах десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц: $S = 14,675 \approx 15$.

Ответ: 15

Пример 2: Вычислить разность двух приближенных значений чисел: $a = 5,863 \pm 0,0005$ и $b = 2,746 \pm 0,0005$.

Решение: Вычисляем границу абсолютной погрешности разности $a-b$:

$\Delta(a-b) = 0,0005 + 0,0005 = 0,001$. В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной, т.к. $\Delta(a-b) > 0,0005$. Итак $a-b = 3,117 \approx 3,12$

Ответ: 3,12

Пример 3: Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел $a = 8,36 \pm 0,005$ и $b = 3,72 \pm 0,004$

Решение: Имеем $8,36 : 3,72 = 2,25$. По формуле (2.12) находим относительную погрешность частного:

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0,005}{8,36} + \frac{0,004}{3,72} = 0,002 = 0,2\%$$

По формуле $\Delta a = |a|\varepsilon_a$ находим границу абсолютной погрешности частного:

$$\Delta(a/b) = 2,25 \cdot 0,002 = 0,0045$$

Полученный результат означает, что в частном все три цифры верные.

Ответ: 0,0045

Самостоятельная работа №2

Выполнение домашней контрольной работы №2 по теме «Вычисление с наперед заданной точностью»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Самостоятельная работа №3

Выполнение домашней контрольной работы №3 по теме «Предел функции»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , быть может, за исключением самой точки x_0 .

Определение 1. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любой последовательности аргументов $x_n \rightarrow x_0$ соответствующая последовательность значений функций $f(x_n) \rightarrow A$.

Если A есть предел функции $f(x)$ в точке x_0 , то пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,

или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Заметим, что если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой (бесконечно большой) при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая (бесконечно малая) при $x \rightarrow x_0$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a , возможно, за исключением самой точки a , и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то существуют пределы их суммы $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, произведения

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ и, если $g(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, то и частного $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и имеют место

равенства:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ при } g(x) \neq 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Свойства пределов

1. Постоянный множитель может быть вынесен из-под знака предела.

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2. Предел разности равен разности пределов.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3. Предел степени равен степени предела.

$$\text{Если } n \in \mathbb{N}, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$$

Пример. Вычислить пределы функции:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x}{x^2 + 1}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 7}{x^3 + 3}, \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x - 2},$$

Решение:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 3 - 1 = 2.$$

Так как при $x=3$, числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Числитель раскладываем на множители $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$ по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 3x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{6 - 0}{1 + 0} = 6.$$

Так как числитель и знаменатель дроби обращаются в ∞ , то частное $\frac{\infty}{\infty}$ неопределенно.

Делим числитель и знаменатель дроби на x^2 .

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 7}{x^3 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^3} - \frac{7}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^3}} = \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} - \frac{5x}{x^4}}{\frac{x}{x^4} - \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}} = \frac{1 - 0}{0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Самостоятельная работа №4

Выполнение домашней контрольной работы № 4 по теме «Решение прикладных задач с помощью производной»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность.
3. Найти асимптоты графика функции.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Найти промежутки монотонности и точки экстремумов функции.
6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графиков функции.
7. Для уточнения графика функции найти несколько дополнительных точек через которые проходит график функции.

Пример 1. Построить график функции $y = x^4 - 4x^2$

1. Область определения функции служит множество $\mathbb{R}$.
2. $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$ – функция четная, значит график функции симметричен относительно оси y .
3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат

$$\begin{array}{l} OX: \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2 \end{array} \right.$$

$$OY: \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

4. Асимптот нет.
5. Находим экстремумы функции:
 $y' = 4x^3 - 8x$

Найдем критические точки первого рода:

$$4x^3 - 8x = 0$$

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = \pm \sqrt{2}$$

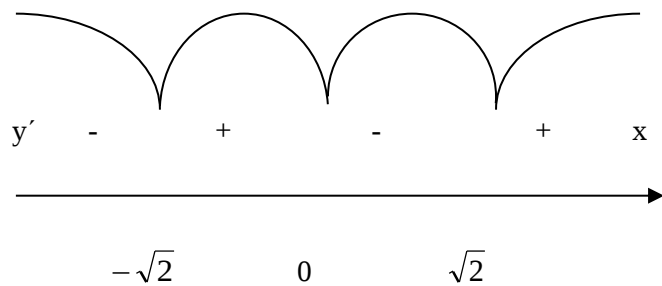
Определим знак производной на каждом интервале:

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 \geq 0,$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1 \leq 0$$

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1) > 0,$$

$$f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2) < 0$$



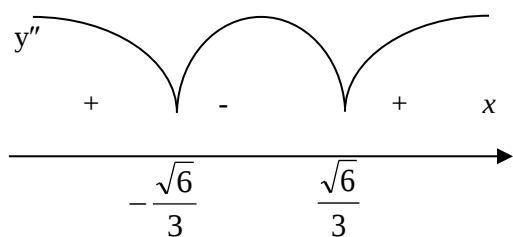
X	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; 0)$	0	$(0; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		-12		0		-12	
Экстр		min		max		min	

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 8(\sqrt{2})^2 = 4 - 16 = -12; \quad f(+2) = -12; \quad f(0) = 0$$

6. Находим направления выпуклостей:

$$y'' = 12x^2 - 8, \quad y'' = 0,$$

$$12x^2 - 8 = 0, \quad x^2 = \frac{8}{12}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



$$f''(2) = 12 \cdot 4 - 8 > 0$$

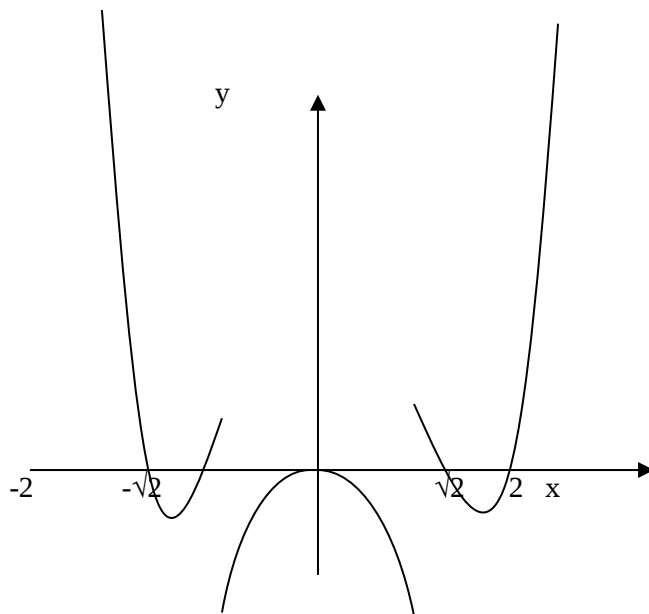
$$f''(0) = 12 \cdot 0 - 8 < 0$$

$$f''(-2) = 12 \cdot 4 - 8 > 0$$

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{36}{81} - \frac{4 \cdot 6}{9} = \frac{-108}{81} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

$$7. f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^2 = 81 - 36 = 45$$

$$f(-3) = 45$$



Самостоятельная работа №5

Выполнение домашней работы №5 по теме «Нахождение неопределенных интегралов различными методами»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Методы интегрирования:

1. **Непосредственное интегрирование** применяется в том случае, когда подынтегральную функцию можно представить в виде суммы. Применяем свойства и таблицу неопределенного интеграла. Затем применяем формулу Ньютона – Лейбница.
2. **Замена переменной.** Заменяем одно из выражений, составляющих подынтегральную функцию на новую переменную, находим дифференциал обеих частей равенства, заменяем подынтегральное выражение. Находим новые пределы интегрирования. Полученный интеграл с новой переменной находим с помощью таблицы интегралов и формулы Ньютона – Лейбница

3. **Интегрирование по частям** производится по формуле: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Примеры:

1) Непосредственное интегрирование

$$\int_1^2 (2x + 1) dx = 2 \int_1^2 x dx + \int_1^2 dx = x^2 \Big|_1^2 + x \Big|_1^2 = (4 - 1) + (2 - 1) = 3 + 1 = 4$$

2) Замена переменной

$$\text{a)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2} = \arctg(u) \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = 1 - 0 = 1$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x dx$$

$$U_H = \sin 0 = 0$$

$$U_\pi = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \int_0^{\sqrt{5}} 2x \sqrt{x^2 + 4} dx &= \int_4^9 \sqrt{u} du = \int_4^9 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} u \sqrt{u} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} (9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}) = \\ &= \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{2 \cdot 19}{3} = 12 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Замена:

$$x^2 + 4 = u$$

$$U_H = 0^2 + 4 = 4$$

$$d(x^2 + 4) = du$$

$$U_\pi = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9$$

$$(x^2 + 4)' dx = du$$

$$2x dx = du$$

3) Метод интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left[x = u; dx = du; \sin x dx = dv; \int \sin x dx = \int dv; -\cos x = v \right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \cos 0\right) + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -(0 - 0) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Рекомендуемая литература:

Богомолов, Н.В. Математика: учебник для СПО: Стр.

Самостоятельная работа №6

Выполнение домашней работы №6 по теме «Применение определенного интеграла».

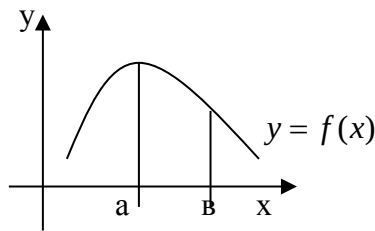
Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Применение определенного интеграла:

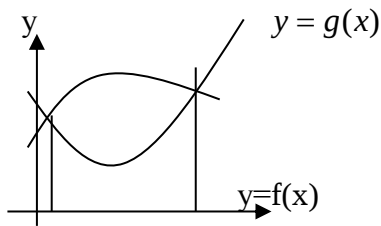
- Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ равен площади криволинейной трапеции.
- Определенный интеграл закона изменения скорости за промежуток времени равен пути, пройденному материальной точкой за этот промежуток времени.

1 случай



$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{Формула Ньютона-Лейбница}$$

2 случай



Пределы интегрирования

$$f(x) = g(x)$$

$$x = a;$$

$$x = b;$$

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

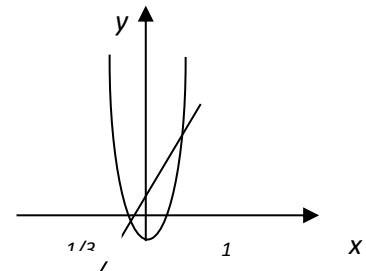
Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$f(x) = 3x^2 - x - 2, y = x - 1$$

Решение. Найдем пределы интегрирования

$$3x^2 - x - 2 = x - 1, 3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

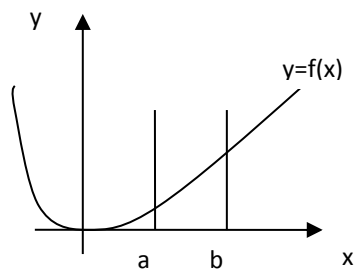
$$D = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25, x = 1, x = -1/3.$$



$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^1 ((x-1) - (3x^2 - x - 2)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^1 (-3x^2 + 2x + 1) dx = \left(-x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^1 = (-1 + 1 + 1) - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \right) = 1\frac{5}{9}$$

Ответ: $1\frac{5}{9}$ куб.ед.

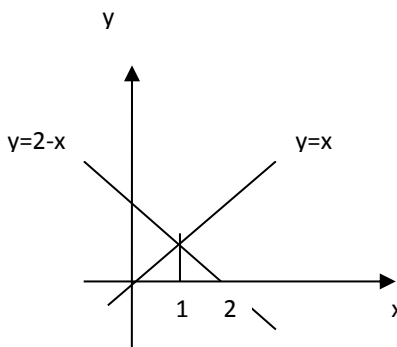
Объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси x плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 0$; $y = x$; $y = 2 - x$ построим тело вращения

$y = x$			$y = 2 - x$		
x	0	1	x	0	2
y	0	1	y	2	0



Найдем пределы интегрирования

$$y=0 \quad x=0 \quad 2-x=0 \quad x=2-x$$

$$x=2 \quad 2x=2$$

$$x=1$$

$$V = V_1 + V_2 \quad V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V_1 = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3} (\text{куб.ед})$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = -\pi \frac{(2-x)^2}{2} \Big|_1^2 = -\pi \cdot \frac{0}{2} + \frac{(2-1)^2 \pi}{2} = \frac{1}{2} \pi (\text{куб.ед})$$

$$V = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} (\text{куб.ед})$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{5}{6} \pi \approx \frac{5 \cdot 3}{2} \approx 2,5 (\text{куб.ед}).$$

Работа, произведенная переменной силой $f(x)$ при перемещении по оси Ox материальной точки от $x = a$, до $x = b$ находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется **закон Гука:**

$F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности (Н/м), F – сила (Н), x – абсолютное удлинение пружины (м), вызванное силой F .

Пример. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10Н.

Решение. Найдем коэффициент пропорциональности $k = \frac{F}{x} = 1000 \text{ Н/м}$. Отсюда $F = 1000x$.

искомую работу найдем по формуле $\int_0^{0,04} 1000x dx = 0,8 \text{ (Дж)}$.

Самостоятельная работа №7

Выполнение домашней работы №7 по теме: «Числовые ряды»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

В общем виде **положительный числовой ряд** можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Здесь:

$\sum$ – математический значок суммы;

a_n – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);

n – переменная-«счётчик». Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n = 1$, затем $n = 2$, потом $n = 3$, и так далее – до бесконечности. Вместо переменной n иногда используется переменная k или m . Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде

случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$ либо с любого *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$
– и так далее, до бесконечности.

Будем считать, что **ВСЕ** слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это **неотрицательные ЧИСЛА**. То есть, на данном уроке речь пойдет о **положительных числовых рядах**.

Пример 1

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$$

Это уже, кстати, «боевое» задание – на практике довольно часто требуется записать несколько членов ряда.

Сначала $n = 1$, тогда: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Затем $n = 2$, тогда: $2 \cdot 2 + 1 = 5$

Потом $n = 3$, тогда: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3+5+7+\dots$$

первые три члена ряда, поэтому записываем ответ:

Пример 2

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

Это пример для самостоятельного решения, ответ в конце урока

Даже для сложного на первый взгляд ряда не составляет трудности расписать его в развернутом виде:

Пример 3

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3) \cdot 5^n}$$

Ответ оставляем в таком виде, полученные члены ряда лучше не упрощать, то есть не

выполнять действия: $\frac{\sqrt{2}}{1 \cdot 5^1} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $\frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 5^2} = \frac{\sqrt{3}}{125}$, $\frac{\sqrt{4}}{9 \cdot 5^3} = \frac{2}{1125}$.

Пример 4

Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots$$

Здесь нет какого-то четкого алгоритма решения, *закономерность нужно просто увидеть*.

В данном случае:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

Для проверки полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ можно «расписать обратно» в развернутом виде.

Сходимость числовых положительных рядов

Необходимый признак сходимости ряда

Одной из ключевых задач теории числовых рядов является **исследование ряда на сходимость**. При этом возможны два случая:

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна

бесконечности: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots = \infty$. Хороший пример расходящегося

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3+5+7+\dots$$

числового ряда встретился в начале урока: $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3+5+7+\dots$. Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда – больше, чем предыдущий,

поэтому $3+5+7+\dots = \infty$ и, значит, ряд расходится. Чуть ниже мы рассмотрим более строгий математический критерий для данного примера.

2) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому *конечному числу* S : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots = S$. В качестве примера сходящегося числового ряда можно привести бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, известную нам

со школы: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$

. Сумму членов бесконечно убывающей

геометрической прогрессии можно найти по формуле: $S = \frac{A}{1-q}$, где A – первый член

прогрессии, q – основание прогрессии. В данном случае: $A=1$, $q = \frac{1}{4}$. Таким

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

образом:

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

сходится, что и требовалось доказать.

Получено конечное число, значит,

Самостоятельная работа №8

Выполнение домашней контрольной работы №8 по теме: «Вычисление определенных интегралов методом трапеций, прямоугольников»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Самый простой, но и самый грубый метод приближенного вычисления интеграла, когда площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямоугольника.

$$\int_a^b f(x) dx \approx h * y_0$$

Здесь h – ширина интервала, y_0 - значение функции, вычисленное в нижнем пределе интегрирования.

В общем случае, если интеграл $[a, b]$ не является малым, то промежуток от a до b разбивается на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ и для точек давления $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ вычисляются значения интегрируемой функции $y=f(x)$. Считаем, что $x_0=a$ и $x_n=b$. Площадь криволинейной трапеции заменяется суммарной площадью полученных прямоугольников.

Вычислить по формуле прямоугольников определенной интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Оценить погрешность вычислений.

Положим $n=10$, т.е. разбиваем интеграл интегрирования от 1 до 2 на десять равных частей.

$$h = \frac{2-1}{10} = 0,1$$

Вычислений значение функции в точках разбиения:

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_1 = 1,1 \qquad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1,1} \approx 0,90909$$

$$x_2 = 1,2 \qquad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1,2} \approx 0,83333$$

$$x_3 = 1,3 \qquad y_3 = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{1,3} \approx 0,76923$$

$$x_4 = 1,4 \qquad y_4 = \frac{1}{x_4} = \frac{1}{1,4} \approx 0,71429$$

$$x_5 = 1,5 \qquad y_5 = \frac{1}{x_5} = \frac{1}{1,5} \approx 0,66667$$

$$x_6 = 1,6 \qquad y_6 = \frac{1}{x_6} = \frac{1}{1,6} \approx 0,625$$

$$x_7 = 1,7 \qquad y_7 = \frac{1}{x_7} = \frac{1}{1,7} \approx 0,58824$$

$$x_8 = 1,8 \qquad y_8 = \frac{1}{x_8} = \frac{1}{1,8} \approx 0,55556$$

$$x_9 = 1,9 \qquad y_9 = \frac{1}{x_9} = \frac{1}{1,9} \approx 0,52632$$

Сумма 7,18773

По формуле получаем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 * 7,18773 = 0,718773$$

Самостоятельная работа №9

Выполнение домашней работы №9 по теме: Применение метода Эйлера при решении дифференциальных уравнений.

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Суть **метода Эйлера** состоит в последовательном построении ломаной, начинающейся в точке (X_0, Y_0) , заданной начальным условием и дающей приблизительный вид графика искомой функции $Y(x)$. Для построения первого (а затем и каждого следующего) участка ломаной в этом методе мы вычисляем значение $f(X_0, Y_0)$, проводим прямую из данной точки с полученным угловым коэффициентом. Поскольку $Y'(X_0) = f(X_0, Y_0)$, то эта прямая будет касательной к интегральной кривой в точке (X_0, Y_0) . Поэтому мы и заменяем часть графика функции на отрезок касательной к ней. Далее, из новой полученной точки мы делаем следующий такой же шаг и т.д.

1. Делим отрезок $[a, b]$ на n -равных частей точками $a = X_0 < X_1 < X_2 < \dots < X_n = b$ или $X_i = a + ih$
2. Последовательно, при $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ осуществляем переход от точки (X_i, Y_i) к точке (X_{i+1}, Y_{i+1}) по формуле $Y_{i+1} = Y_i + U_i$, где на каждом отрезке величина U_i вычисляется по одному и тому же закону, задающему метод решения уравнений.

Будем полагать, что f - заданная функция, x - независимая переменная. Надо найти функцию y , являющуюся решением задачи (1)-(2) на отрезке $a \leq x \leq b$.

Интересующий нас метод определяется формулами

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Вывод метода Эйлера очевиден. Из разложения Тейлора функции y в окрестности точки x_k имеем

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(z_k) =$$

$= y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} y''(z_k)$ где z_k лежит внутри отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Мы будем считать, что все выписываемые производные действительно существуют. Если производная y'' ограничена, а шаг h мал, то можем отбросить последний член, и написать

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h f(x_k, y_k).$$

Это и служит основой для (3). Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации решения на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ отрезком касательной, проведённой к графику решения в точке x_k

Приведём теперь простой пример использования этого метода. Рассмотрим задачу

$$y'(x) = y^2(x) + 2x - x^4, \quad y(0) = 0$$

Легко проверить, что точным решением этой задачи является функция $y(x) = x^2$. Здесь $f(x, y) = y^2 + 2x - x^4$ и, следовательно, формулы метода Эйлера для (5) с учётом того, что $x_k = kh$, принимают вид

$y_{k+1} = y_k + h (y_k^2 + 2kh - k^4 h^4)$, $k = 0, 1, \dots$, $y_0 = 0$, где z_k лежит внутри отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Мы будем считать, что все выписываемые производные действительно существуют. Если производная y'' ограничена, а шаг h мал, то можем отбросить последний член, и написать

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h f(x_k, y_k).$$

Это и служит основой для (3). Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации решения на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ отрезком касательной, проведённой к графику решения в точке x_k

Приведём теперь простой пример использования этого метода. Рассмотрим задачу

$$y'(x) = y^2(x) + 2x - x^4, \quad y(0) = 0$$

Легко проверить, что точным решением этой задачи является функция $y(x) = x^2$. Здесь $f(x, y) = y^2 + 2x - x^4$ и, следовательно, формулы метода Эйлера для (5) с учётом того, что $x_k = kh$, принимают вид

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k^2 + 2kh - k^4h^4), \quad k=0, 1, \dots, \quad y_0 = 0$$

Самостоятельная работа №10

Выполнение домашней работы №10 по теме: Дифференциальные уравнения первого порядка.
Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, в котором содержится независимая переменная x , искомая функция y и ее производные (или дифференциалы функции и аргумента).

$F(x, y, y', y'', y''', y^{(n)}) = 0$ дифференциальное уравнение порядка.

Порядком дифференциального уравнения является наивысший порядок производных, входящих в данное уравнение. Общим решением дифференциального уравнения называется функция

$y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$, обращающая данное уравнение в тождество. Количество постоянных зависит от порядка уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)})$ называется решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях постоянных $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$

Самостоятельная работа №11

Выполнение домашней контрольной работы №11 по теме: Дифференциальные уравнения второго порядка.

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Пусть $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Заменим $y' = \frac{dy}{dx}$, тогда уравнение примет вид: $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$,

разделим переменные $\frac{dy}{f_1(y)} = f_1(x)dx$ проинтегрируем обе части уравнения $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$

Получим общее решение: $F_2(y) = F_1(x) + C$.

Пример 1. Решение уравнение $y' \frac{xy}{x^2+1}$ и найти его частное решение, удовлетворяющее условию $y=3$, при $x = 2\sqrt{2}$.

Решение: т.к. $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+1}$. Разделим переменные $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2+1}$.

Интегрируя обе части уравнения, получим $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + \ln|C_1|$.

Пропотенцировав, получим $y = |C_1| \cdot \sqrt{x^2 + 1}$, пусть $C = |C_1|$, тогда $y = C \sqrt{x^2 + 1}$ - общее решение. Найдем частное решение при $x = 2\sqrt{2}, y = 3$ $3 = C \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1}$, $3 = C\sqrt{9}$, $C = 1$.

Частное решение имеет вид $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Ответ: $y = C\sqrt{x^2 + 1}$ - общее решение, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ - частное решение.

Пример 2. Решение дифференциальное уравнение 2-го порядка $y'' = x^2 + 2x + 3$ и найти его частное решение при $y = 0, y' = 4, y = 5$.

Решение: Уравнения такого типа решается методом двойного интегрирования.

Обозначим $y' = p(x)$, а $y'' = p'(x)$, тогда уравнение примет вид $p'(x) = x^2 + 2x + 3$, заменим $p' = \frac{dp}{dx}$, $\frac{dp(x)}{dx} = x^2 + 2x + 3$, умножим обе части уравнения на dx , $dp(x) = x^2 dx + 2x dx + 3 dx$.

Проинтегрируем данное уравнение $\int dp(x) = \int x^2 dx + 2 \int x dx + 3 \int dx$. Получим $p(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x + C_1$. Заменим $p(x) = y' = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1$, заменим $y' = \frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1$, умножим обе части равенства на dx . Получим $dy = \frac{x^3 dx}{3} + x^2 dx + 3x dx + C_1 dx$.

Проинтегрируем уравнение

$\int dy = \frac{1}{3} \int x^3 dx + \int x^2 dx + 3 \int x dx + C_1 \int dx$. Получим общее решение $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2$ или $y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2$.

Подставим в уравнение $y' = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1$ значения x, y' и найдем значение C_1 $4 = \frac{0^3}{3} + 0^2 = 3 \cdot 0 + C_1$, $C_1 = 4$.

Подставим в общее решение значения x, y, C_1 и найдем значение C_2

$$5 = \frac{0^4}{12} + \frac{0^3}{3} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} + 4 \cdot 0 + C_2, C_2 = 5.$$

Подставим значения C_1, C_2 в общее решение и получим частное решения $y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x + 5$

Ответ: $y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} C_1 x + C_2$ – общее решение,

$y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} 4C_1 x + 5C_2$ – частное решение при $x = 0, y = 5, y' = 4$.

Самостоятельная работа №12

Подготовка сообщения по теме «История возникновения теории комплексных чисел»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.2.

Самостоятельная работа №13

Выполнение домашней работы №12 по теме «Комплексные числа»

Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Множество действительных чисел и мнимая единица составляют множество комплексных чисел. Число $Z = a + bi$ – комплексное число (алгебраическая форма записи)

a – действительная часть числа

bi – мнимая часть числа.

$$a + bi = a_1 + b_1 i, \text{ если } a = a_1, \quad b = b_1$$

$a + bi$ и $a - bi$ называются сопряженными

Числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются противоположными

Сложение

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Вычитание

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

Умножение

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot a_2 i + a_1 \cdot b_2 i + b_1 \cdot b_2 i^2 = \\ &= a_1 \cdot a_2 + i(b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) - b_1 \cdot b_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) i \end{aligned}$$

Деление

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z_1^n = r_1^n (\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1)$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} \left(\cos \frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n} + i\sin \frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n} \right)$$

Показательная форма комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i\sin \varphi)$ имеет вид $z = re^{i\varphi}$

Пример 1 Выполнить сложение комплексных чисел $z_1=4+2i$ и $z_2=1+5i$

По правилу сложения комплексных чисел имеем

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

подставим значения и получим:

$$z_1 + z_2 = (4+2i) + (1+5i) = (4+1) + (2+5)i = 5+7i$$

Пример 2 Выполнить вычитание комплексных чисел $z_1=3+5i$ и $z_2=6+3i$

По правилу вычитания комплексных чисел имеем

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

подставим значения и получим:

$$z_1 - z_2 = (3+5i) - (6+3i) = (3-6) + (5-3)i = -3+2i$$

Пример 3 Выполнить произведение комплексных чисел $z_1=2-3i$ и $z_2=3+2i$

По правилу произведения комплексных чисел имеем

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) i$$

подставим значения и получим:

$$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)(3+2i) = (2 \cdot 3 - (-3) \cdot 2) + (-3 \cdot 3 + 2 \cdot 2)i = 12-5i$$

Пример 4 Выполнить деление комплексных чисел $z_1=2-3i$ и $z_2=4+5i$

По правилу деления комплексных чисел имеем

$$\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{4^2-5^2} = \frac{-7-22i}{-9} = \frac{7}{9} + \frac{22i}{9}$$

Самостоятельная работа №14

Выполнение домашней контрольной работы №13 по теме «Системы линейных уравнений»
Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - z = -3 \\ x - 5y - z = -8 \end{cases}$$

Решение:

Решим с помощью обратной матрицы

Запишем систему уравнений в матричном виде $AX = B$, где

$$\text{Матрица коэффициентов } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

1 способ. Решим с помощью обратной матрицы

Определитель матрицы A

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1-5) + 2(-2+1) + (-10-1) = -6-2-11 = -19$$

Транспонируем матрицу A

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Найдем алгебраические дополнения к элементам транспонированной}$$

матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-5 = -6, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10-1 = -11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2+5) = -7, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 2) = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений $\bar{A} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Составим матрицу, обратную матрице А по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \bar{A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы уравнений по формуле $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot (-1) - 7 \cdot (-3) + 1 \cdot (-8) \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-8) \\ -11 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) + 5 \cdot (-8) \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 \\ -19 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка:
$$\begin{cases} -1 - 2 \cdot 1 + 2 = -1 \\ 2 \cdot (-1) + 1 - 2 = -3, \text{ верно.} \\ -1 - 5 \cdot 1 - 2 = -8 \end{cases}$$

Ответ: (- 1; 1; 2)

Самостоятельная работа №15

Выполнение домашней контрольной работы №14 по теме «Уравнения. Системы уравнений»
Методические указания: выполнить работу в соответствии с порядком выполнения самостоятельной работы п. 2.1.1.

Теоретический материал:

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - z = -3 \\ x - 5y - z = -8 \end{cases}$$

Решение:

1. Решим методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу из коэффициентов и свободных членов

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & |-1 \\ 2 & 1 & -1 & |-3 \\ 1 & -5 & -1 & |-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & |-1 \\ 0 & 5 & -3 & |-1 \\ 0 & -3 & -2 & |-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & |-1 \\ 0 & 5 & -3 & |-1 \\ 0 & 0 & -19 & |-38 \end{pmatrix}$$

1. Умножим 1 строку на (-2) с сложим поэлементно со 2 строкой, результат запишем во 2 строку.
Умножим 1 строку на (-1) и сложим поэлементно с 3 строкой, результат запишем в 3 строку.
2. Умножим 2 строку на 3, а 3 строку на 5, сложим и запишем в 3 строку.
Составим систему уравнений, используя полученную матрицу треугольного вида

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 5y - 3z = -1 \\ -19z = -38 \end{cases} \begin{cases} x - 2y + 2 = -1 \\ 5y - 3 \cdot 2 = -1 \\ z = 2 \end{cases} \begin{cases} x - 2 \cdot 1 + 2 = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Проверка выполняется, как и в 1 способе.

Ответ: (-1; 1; 2)

2. Решим с помощью формул Крамера.

Определитель матрицы А

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1 - 5) + 2(-2 + 1) + (-10 - 1) = -6 - 2 - 11 = -19$$

Заменим 1 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = -(-1 - 5) + 2(3 - 8) + (15 + 8) = 6 - 10 + 23 = 19$$

Заменим 2 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = (3 - 8) + (-2 + 1) + (-16 + 3) = -5 - 1 - 13 = -19$$

Заменим 3 столбец матрицы А на столбец В и найдем определитель полученной матрицы.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = (-8 - 15) + 2(-16 + 3) - (-10 - 1) = -23 - 26 + 11 = -38$$

Найдем неизвестные по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x = \frac{19}{-19} = -1, \quad y = \frac{-19}{-19} = 1, \quad z = \frac{-38}{-19} = 2$$

Проверка выполняется, как и в I способе.

Ответ: (- 1; 1; 2)

Основные источники:

1. Богомолов, Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко.-5-е изд., перераб. и доп.- Москва: Юрайт, 2016.-396 с.
2. Дадаян, А. А. Математика [Электронный ресурс]: учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с. - Режим доступа <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=397662>(ЭБС Znanium).
3. Канцедаль, С. А. Дискретная математика [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.А. Канцедаль. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 224 .-Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=376152>(ЭБС Znanium).

Дополнительные источники:

1. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике [Текст]: учебное пособие для СПО: В 2 ч. Ч 1 / Н.В. Богомолов.- 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2016.-285 с.
2. Математика в примерах и задачах. Ч. 1 [Электронный ресурс]: В 2 ч.: учеб. пособие / Л.И. Майсеня [и др.]; под общ. ред. Л.И. Майсени. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 356 с.: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=509699>.
3. Математика в примерах и задачах. Ч. 2 [Электронный ресурс]: В 2 ч.: учеб. пособие / Л. И. Майсеня [и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсени. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=509703>.

Интернет источники:

1. http://www.rusedu.ru/subcat_is/htm/
2. <http://www.alleng.ru/edu/math3.htm>
3. <http://www.softtok.org/science/math/>